

**НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ**

«ЗАТВЕРДЖУЮ»



Директор ІПММ НАН України
акад. НАН України
Ігор СКРИПНІК
«25» вересня 2025 р.

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

**Лінійні та квазілінійні рівняння еліптичного і
параболічного типу**

**підготовки здобувачів ступеня вищої освіти
треть (освітньо-науковий)
доктора філософії**

галузь знань 11 Математика та статистика

спеціальність 111 Математика

Черкаси – 2025 р.

Робоча навчальна програма навчальної дисципліни «Лінійні та квазілінійні рівняння еліптичного і параболічного типу» для здобувачів наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 Математика

Розробник:

Скрипнік Ігор Ігорович, директор, завідувач відділу нелінійного аналізу та рівнянь математичної фізики Інституту прикладної математики і механіки НАН України, доктор фізико-математичних наук, доцент, академік НАН України

Робочу програму схвалено на засіданні відділу нелінійного аналізу та рівнянь математичної фізики

Протокол № 2 від 18.09.2025 року.

Завідувач відділу



I.I. Скрипнік

Схвалено Науково-методичною радою Інституту прикладної математики і механіки НАН України

Протокол № 4 від 22 вересня 2025 року.

Голова науково-методичної ради



О.В. Несмєлова

1. Опис навчальної дисципліни

Найменування показників	Галузь знань, напрям підготовки, освітньо-кваліфікаційний рівень	Характеристика навчальної дисципліни	
Кількість кредитів - 3	Галузь знань: 11 Математика та статистика	професійна	
Загальна кількість годин – 90	Спеціальність: 111 Математика	Рік підготовки:	
		1-й	
		Семестр	
		1-й	2-й
		Лекції	
Тижневих годин: аудиторних -2 самостійної роботи -0,9	Освітньо-кваліфікаційний рівень: доктор філософії	14	16
		Практичні	
		12	14
		Самостійна робота	
		16	18
		Вид контролю: іспит	

2. Мета, завдання та очікувані результати навчальної дисципліни.

Метою вивчення навчальної дисципліни «Лінійні та квазілінійні рівняння еліптичного і параболічного типу» є формування теоретичних знань з якісної теорії лінійних та квазілінійних рівнянь еліптичного і параболічного типу, оволодіння основними методами дослідження таких рівнянь.

Основними завданнями вивчення дисципліни «Лінійні та квазілінійні рівняння еліптичного типу» є:

- опанувати основні поняття та теореми теорії лінійних та квазілінійних рівнянь еліптичного і параболічного типу;
- оволодіти основними методами дослідження лінійних та квазілінійних рівнянь еліптичного і параболічного типу.

Очікувані результати навчальної дисципліни

Загальні компетентності:

1. Аналіз і синтез. Здатність до аналізу та синтезу на основі логічних аргументів та перевірених фактів; навички управління інформацією (уміння знаходити та аналізувати інформацію з різних джерел) (ЗК 1).

2. Дослідницька здатність. Компетентності ініціювати та виконувати (індивідуально або в науковій групі) наукові дослідження, що приводять до отримання нових знань; здатність застосовувати знання на практиці (ЗК 2).
3. Гнучкість мислення. Набуття гнучкого способу мислення, який дає можливість зрозуміти й розв'язати проблеми та задачі, зберігаючи при цьому критичне відношення до усталених наукових концепцій (ЗК 3).
4. Комунікативні навички. Здатність ефективно спілкуватися із спеціальною та загальною аудиторіями, а також представляти складну інформацію у зручний та зрозумілий спосіб усно і письмово, використовуючи відповідну технічну лексику та методи; навички використання інформаційних і комунікаційних технологій; здатність спілкуватися рідною та другою іноземною мовою як усно, так і письмово (ЗК 6).
5. Міжнародний кругозір. Здатність працювати в міжнародному середовищі, ставитися із повагою до національних та культурних традицій, способів роботи інших членів групи (ЗК 7).
6. Популяризаційні навички. Вміння спілкуватися із нефаківцями; здатність провести усну презентацію та написати зрозумілу статтю за результатами проведених досліджень, а також щодо сучасних концепцій у математиці для нефаківців у цій галузі; здатність спілкуватися з експертами з інших галузей (ЗК 8).
7. Етичні установки. Етика поведінки в наукових дослідженнях; турбота про якість результату (ЗК 11).
8. Особисті якості. Здатність до навчання, саморозвитку та самовдосконалення протягом життя; визначеність і наполегливість щодо поставлених завдань і взятих обов'язків (ЗК 12).

Фахові компетентності (згідно до переліку фахових компетентностей освітньої програми):

1. Знання історії розвитку та сучасного стану наукових знань за спеціальністю та обраною спеціалізацією (ФК 1).
2. Здатність застосовувати сучасну методологію, загальні та спеціальні методи наукового дослідження за спеціальністю та обраною спеціалізацією (ФК 2).
3. Здатність логічно мислити, формулювати, строго доводити та перевіряти правильність математичних тверджень (ФК 4).
4. Здатність до висунення нових ідей, розв'язання міждисциплінарних та прикладних задач (ФК 8).
5. Оволодіння основними поняттями, підходами та принципами сучасних розділів функціонального аналізу, рівнянь математичної фізики та теорії диференціальних рівнянь, застосування абстрактних методів при розв'язанні задач (ФК 12).
6. Оволодіння сучасними методами теорії граничних задач, теорії узагальнених функцій, теорії операторів (ФК 13).

7. Оволодіння спеціальними розділами та методами досліджень теорії функціонального аналізу та теорії диференціальних рівнянь, набуття умінь ефективно застосовувати їх для аналізу складних систем та явищ (ФК 14).

Програмні результати навчання (згідно до переліку програмних результатів навчання освітньої програми):

1. Знати та розуміти традиційні та передові тенденції в галузі математики, етапи історичного розвитку математичних знань і парадигм, формування поглибленої системи наукових знань за напрямом досліджень (ПРН-1).
2. Знати основні принципи, форми та методи проведення наукових досліджень в галузі математики, володіти математичним апаратом в об'ємі, достатньому для професійної діяльності (ПРН-3).
3. Вміти за допомогою теоретичного математичного апарату досліджувати різноманітні природні явища та процеси, проводити аналіз впливу на них різних факторів, а також вивчати взаємодію між явищами з метою отримання переконливо доведених і корисних фундаментальних та практичних результатів (ПРН-5).
4. Здійснювати професійну письмову й усну комунікацію українською та іноземними мовами. Уміти працювати зі спеціальною літературою та наукометричними базами даних, в тому числі іноземною мовою (ПРН-8).
5. Вміти організувати неперервний власний саморозвиток і самовдосконалення, набуття гнучкого способу мислення при творчому дослідженні, в тому числі прикладних математичних проблем (ПРН-10).
6. Вміти формулювати наукові проблеми з огляду на цінні стін орієнтири сучасного суспільства та стану її поточного дослідження (ПРН-11).
7. Розв'язувати фундаментальні та прикладні задачі придатними математичними методами, перевіряти умови виконання математичних тверджень, коректно переносити умови та твердження на нові класи об'єктів, знаходити й аналізувати відповідності між поставленою задачею й відомими моделями, будувати та досліджувати нові математичні моделі (ПРН-12).
8. Знати теоретичні основи і застосовувати методи сучасної теорії диференціальних рівнянь та теорії нелінійних коливань для розв'язування фундаментальних та прикладних задач (ПРН-16).
9. Знати теоретичні основи і застосовувати методи сучасної наукової теорії функціонального аналізу, основні властивості диференціальних операторів, узагальнених функцій і вміння ефективно застосовувати їх для синтезу і аналізу складних систем та явищ (ПРН-17).

10. Знати теоретичні основи і застосовувати сучасні методи математичної фізики для моделювання реальних фізичних, біологічних, екологічних, соціально-економічних та інших процесів і явищ (ПРН-19).

За результатами вивчення навчальної дисципліни здобувач доктора філософії повинен:

знати:

- основні поняття і теореми курсу;
- методи дослідження лінійних та квазілінійних рівнянь еліптичного і параболічного типу;

уміти :

- розв'язувати стандартні задачі, доводити основні теореми курсу;
- використовувати отримані теоретичні знання в самостійних дослідженнях.

3. Програма навчальної дисципліни

Змістовий модуль 1. Лінійні рівняння еліптичного типу

Тема 1. Про можливість розв'язання задачі Діріхле в просторах $C^{l+\alpha}(\bar{\Omega})$

Тема 2. Принцип максимуму. Априорна оцінка Шаудера.

Тема 3. Про розв'язність в $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ інших крайових задач.

Тема 4. Узагальнені розв'язки. Перша основна нерівність.

Змістовий модуль 2. Лінійні рівняння параболічного типу

Тема 1. Рівняння теплопровідності і теплові потенціали.

Тема 2. Оцінки теплових потенціалів в гельдеровських нормах та нормах $W_q^l(\Omega)$.

Тема 3. Перша крайова задача в $W_q^{2,1}(Q_T)$

Тема 4. Фундаментальний розв'язок параболічного рівняння другого порядку. Розв'язок задачі Коші.

Змістовий модуль 3. Квазілінійні рівняння еліптичного типу

Тема 1. Обмежені узагальнені розв'язки. Неперервність за Гельдером.

Тема 2. Єдиність в малому.

Тема 3. Оцінки максимуму градієнта розв'язку.

Тема 4. Існування узагальнених похідних другого порядку. Про обмеженість градієнтів узагальнених розв'язків.

Змістовий модуль 4. Квазілінійні рівняння параболічного типу

Тема 1. Обмеженість узагальнених розв'язків. Неперервність за Гельдером.

Тема 2. Розв'язність першої крайової задачі. Інші крайові задачі.

Тема 3. Задача Коші.

4. Структура навчальної дисципліни

Назва теми	Кількість годин			
	Усього	у тому числі		
		Лекції	Практичні заняття	Самостійна робота
1	2	3	4	5
Змістовий модуль 1. Лінійні рівняння еліптичного типу				
Тема 1. Про можливості розв'язання задачі Діріхле в просторах $C^{l+\alpha}(\bar{\Omega})$	6	2	2	2
Тема 2. Принцип максимуму. Апріорна оцінка Шаудера.	6	2	2	2
Тема 3. Про розв'язність в $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ інших крайових задач.	4	2		2
Тема 4. Узагальнені розв'язки. Перша основна нерівність.	6	2	2	2
Змістовий модуль 2. Лінійні рівняння параболічного типу				
Тема 1. Рівняння теплопровідності і теплові потенціали.	7	2	2	3
Тема 2. Оцінки теплових потенціалів в гельдеровських нормах та нормах $W_q^l(\Omega)$.	7	2	2	3
Тема 3. Перша крайова задача в $W_q^{2,1}(Q_T)$	7	2	2	3
Тема 4. Фундаментальний розв'язок параболічного рівняння другого порядку. Розв'язок задачі Коші.	6	2	2	2

Змістовий модуль 3. Квазілінійні рівняння еліптичного типу				
Тема 1. Обмежені узагальнені розв'язки. Неперервність за Гельдером.	6	2	2	2
Тема 2. Єдиність в малому.	4	2		2
Тема 3. Оцінки максимуму градієнта розв'язку.	6	2	2	2
Тема 4. Існування узагальнених похідних другого порядку. Про обмеженість градієнтів узагальнених розв'язків.	7	2	2	3
Змістовий модуль 4. Квазілінійні рівняння параболічного типу				
Тема 1. Обмеженість узагальнених розв'язків. Неперервність за Гельдером.	6	2	2	2
Тема 2. Розв'язність першої крайової задачі. Інші крайові задачі	6	2	2	2
Тема 3. Задача Коші.	6	2	2	2
Усього годин	90	30	26	34

5. Теми практичних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
Змістовий модуль 1. Лінійні рівняння еліптичного типу		
1	Про можливість розв'язання задачі Діріхле в просторах $C^{l+\alpha}(\bar{\Omega})$	2
2	Принцип максимуму. Априорна оцінка Шаудера.	2
3	Узагальнені розв'язки. Перша основна нерівність.	2
Змістовий модуль 2. Лінійні рівняння параболічного типу		
1	Рівняння теплопровідності і теплові потенціали.	2
2	Оцінки теплових потенціалів в гельдеровських нормах та нормах $w_q^l(\Omega)$.	2
3	Перша крайова задача в $w_q^{2,1}(Q_T)$	2
4	Фундаментальний розв'язок параболічного рівняння	

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
	другого порядку. Розв'язок задачі Коші.	2
Змістовий модуль 3. Квазілінійні рівняння еліптичного типу		
1	Обмежені узагальнені розв'язки. Неперервність за Гельдером.	2
2	Оцінки максимуму градієнта розв'язку.	2
3	Існування узагальнених похідних другого порядку. Про обмеженість градієнтів узагальнених розв'язків.	2
Змістовий модуль 4. Квазілінійні рівняння параболічного типу		
1	Обмеженість узагальнених розв'язків. Неперервність за Гельдером.	2
2	Розв'язність першої крайової задачі. Інші крайові задачі.	2
3	Задача Коші.	2
	Разом	26

6. Теми для самостійної роботи

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
Змістовий модуль 1. Лінійні рівняння еліптичного типу		
1	Про можливість розв'язання задачі Діріхле в просторах $C^{l+\alpha}(\bar{\Omega})$	2
2	Принцип максимуму. Апріорна оцінка Шаудера.	2
3	Про розв'язність в $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ інших крайових задач.	2
4	Узагальнені розв'язки. Перша основна нерівність.	2
Змістовий модуль 2. Лінійні рівняння параболічного типу		
1	Рівняння теплопровідності і теплові потенціали.	3
2	Оцінки теплових потенціалів в гельдеровських нормах та нормах $w_q^l(\Omega)$.	3
3	Перша крайова задача в $w_q^{2,1}(Q_T)$	3
4	Фундаментальний розв'язок параболічного рівняння другого порядку. Розв'язок задачі Коші.	2

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
Змістовий модуль 3. Квазілінійні рівняння еліптичного типу		
1	Обмежені узагальнені розв'язки. Неперервність за Гельдером.	2
2	Єдиність в малому.	2
3	Оцінки максимуму градієнта розв'язку.	2
4	Існування узагальнених похідних другого порядку. Про обмеженість градієнтів узагальнених розв'язків.	3
Змістовий модуль 4. Квазілінійні рівняння параболічного типу		
1	Обмеженість узагальнених розв'язків. Неперервність за Гельдером.	2
2	Розв'язність першої крайової задачі. Інші крайові задачі.	2
3	Задача Коші.	2
	Разом	34

7. Методи навчання

При викладанні навчальної дисципліни «Лінійні та квазілінійні рівняння еліптичного і параболічного типу» використовуються такі методи навчання: проблемно-пошуковий, пояснювально-ілюстративний, індуктивний і дедуктивний.

8. Методи контролю

Використовуються наступні методи контролю:

- Поточний контроль знань:
 - усне опитування;
 - виконання практичних робіт;
 - тестування;
 - виконання дослідницьких завдань.
- Підсумковий контроль знань (іспит):
 - у письмовій формі.

9. Критерії оцінювання результатів навчання

Розподіл балів, які отримує аспірант

Аудиторна робота														Самостійна робота	Підсумковий контроль (іспит)	Загальна кількість отриманих балів	
Змістовий модуль 1				Змістовий модуль 2				Змістовий модуль 3				Змістовий модуль 4					
Теми																	
T1	T2	T3	T4	T1	T2	T3	T4	T1	T2	T3	T4	T1	T2	T3			
3	3	3	3	4	3	3	4	3	3	4	4	3	3	4	10	40	100

Шкала оцінювання

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка за національною шкалою
	для іспиту
90-100	«відмінно» - здобувач повно і всебічно розкриває питання теми, вільно оперує поняттями і термінологією, демонструє глибокі знання джерел, має власну точку зору стосовно відповідної теми і може аргументовано її доводити
75-89	«добре» - загалом рівень знань здобувачів відповідає викладеному вище, але мають місце деякі упущення при виконанні завдань, обґрунтування неточні, не підтверджуються достатньо обґрунтованими доказами
60-74	«задовільно» - здобувач розкрив питання, в загальних рисах, розуміє їх суть, намагається робити висновки, але при цьому припускається грубих помилок, матеріал викладає нелогічно і не самостійно
35-59	«незадовільно» - з можливістю повторного складання, здобувач не в змозі дати відповідь на поставлене запитання або відповідь неправильна, не розуміє суті питання, не може зробити висновки
0-34	«незадовільно» - з обов'язковим повторним вивченням дисципліни

10. Орієнтовний перелік питань до підсумкового контролю (іспит)

1. Простори Соболева. Теореми вкладення.
2. Класи функцій U_p та V_p , U_2 та V_2 .
3. Розв'язність задачі Діріхле для лінійних еліптичних рівнянь.
в просторах $C^{l+\alpha}(\bar{\Omega})$.
4. Принцип максимуму для лінійних еліптичних рівнянь.
5. Априорна оцінка Шаудера.
6. Розв'язність інших крайових задач в $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$.
7. Узагальнені розв'язки лінійних еліптичних рівнянь.
8. Перша основна нерівність.
9. Розв'язність першої крайової задачі для лінійних еліптичних рівнянь.
10. Друга і третя крайові задачі для лінійних еліптичних рівнянь.
11. Обмежені узагальнені розв'язки квазілінійних еліптичних рівнянь з дивергентною головною частиною. Неперервність за Гельдером.
12. Єдиність в малому.
13. Оцінки максимуму градієнта розв'язків квазілінійних еліптичних рівнянь з дивергентною головною частиною.
14. Існування узагальнених похідних другого порядку. Про обмеженість градієнтів узагальнених розв'язків.
15. Оцінки норм $|u|^{l+\alpha}$, $l \geq 1$.
16. Рівняння теплопровідності і теплові потенціали.
17. Оцінки теплових потенціалів в гельдеровських нормах.
18. Оцінки теплових потенціалів в нормах $w_q^l(\Omega)$.
19. Перша крайова задача в $w_q^{2,1}(Q_T)$.
20. Фундаментальний розв'язок параболічного рівняння другого порядку.
21. Оцінки фундаментального розв'язку параболічного рівняння другого порядку.
22. Розв'язок задачі Коші для лінійного параболічного рівняння другого порядку.
23. Потенціал простого шару.
24. Розв'язок першої крайової задачі лінійного параболічного рівняння другого порядку.
25. Обмеженість узагальнених розв'язків квазілінійних параболічних рівнянь з дивергентною головною частиною.
26. Неперервність за Гельдером розв'язків квазілінійних параболічних рівнянь з дивергентною головною частиною.
27. Розв'язність першої крайової задачі для квазілінійного параболічного рівняння з дивергентною головною частиною.
28. Інші крайові задачі для квазілінійного дивергентного параболічного рівняння.

29. Задача Коші для квазілінійного дивергентного параболічного рівняння.

11. Рекомендована література

Основна література дисципліни

1. O.A. Ladyzenskaya, N.A. Solonnikov and N.N. Ural'tzeva, Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type, Translations of Mathematical Monographs, 23, American Mathematical Society, Providence, RI, 1967.
2. O.A. Ladyzenskaya and N.N. Ural'tzeva, Linear and Quasilinear Elliptic Equations, Academic Press, New York, 1968.
3. D. Gilbarg and N.S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, 2nd ed., Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No. 224, Springer-Verlag, Berlin, 1983.