

**НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ**

«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Директор ІПММ НАН України,
академік НАН України



Ігор СКРИПНІК
« 25 » вересня 2025 р.

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Теорія керування детермінованими динамічними системами

**підготовки здобувачів ступеня вищої освіти
третьої (освітньо-наукової)
доктора філософії**

галузь знань 11 Математика та статистика

спеціальність 113 Прикладна математика

Робоча навчальна програма навчальної дисципліни «Теорія керування детермінованими динамічними системами» для здобувачів наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 Прикладна математика.

Розробник:

Зуєв Олександр Леонідович, завідувач відділу прикладної математики, член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор.

Робочу програму схвалено на засіданні відділу прикладної механіки.

Протокол № 2 від 16 вересня 2025 року.

Завідувач відділу прикладної механіки



Зуєв О.Л.

Схвалено Науково-методичною радою Інституту прикладної математики і механіки НАН України.

Протокол № 4 від 22 вересня 2025 року.

Голова науково-методичної ради



Несмєлова О.В.

1. Опис навчальної дисципліни

Найменування показників	Галузь знань, напрям підготовки, освітньо-кваліфікаційний рівень	Характеристика навчальної дисципліни
Кількість кредитів - 3	Галузь знань: 11 Математика та статистика	Обов’язкова
Загальна кількість годин – 90	Спеціальність: 113 Прикладна математика	Рік підготовки:
		1
		Семестр
		1-2
		Лекції
Тижневих годин: аудиторних – 2 самостійної роботи – 0,9	Освітньо-кваліфікаційний рівень: доктор філософії	30 год
		Практичні
		26 год
		Самостійна робота
		34 год
		Вид контролю: іспит

2. Мета, завдання та очікувані результати навчальної дисципліни.

Метою навчальної дисципліни «Теорія керування детермінованими динамічними системами» є формування системи знань про задачі математичної теорії керування та методи їх дослідження. Окремою метою є висвітлення модельних проблем керування, що виникають в сучасній інженерній практиці.

Завдання навчальної дисципліни:

- формування основних понять теорії керування: динамічна система з керуванням, клас припустимих керувань, програмне керування, керування зі зворотним зв'язком, множина досяжності, орбіти, функціонал якості, варіація функціоналу, оптимальне керування, рангова умова досяжності, лінеаризація зі зворотним зв'язком;
- ознайомлення з властивостями керованості, спостережуваності та стабілізованості лінійних систем керування;
- доведення рангових критеріїв керованості та спостережуваності Калмана;
- встановлення двоїстості властивостей керованості та спостережуваності лінійних систем;
- дослідження задач оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна;
- застосування принципу оптимальності Беллмана;
- дослідження задач стабілізації лінійних систем зі стаціонарним зворотним зв'язком;
- встановлення умов еквівалентності нелінійних систем до стандартної канонічної форми Бруновського;
- ініціювання досліджень прикладних задач математичної теорії керування;
- здатність саморозвиватися і самовдосконалюватися при творчому дослідженні математичних проблем теорії керування.

Очікувані результати навчальної дисципліни

Загальні компетентності:

1. ЗК1. Аналіз і синтез. Здатність до аналізу та синтезу на основі логічних аргументів та перевірених фактів; навички управління інформацією (уміння знаходити та аналізувати інформацію з різних джерел).

2. ЗК2. Дослідницька здатність. Компетентності ініціювати та виконувати (індивідуально або в науковій групі) наукові дослідження, що приводять до отримання нових знань; здатність застосовувати знання на практиці.

3. ЗК3. Гнучкість мислення. Набуття гнучкого способу мислення, який дає можливість зрозуміти й розв'язати проблеми та задачі, зберігаючи при цьому критичне відношення до усталених наукових концепцій.

4. ЗК6. Комунікативні навички. Здатність ефективно спілкуватися із спеціальною та загальною аудиторіями, а також представляти складну інформацію у зручний та зрозумілий спосіб усно і письмово, використовуючи відповідну технічну лексику та методи; навички використання інформаційних і комунікаційних технологій; здатність спілкуватися рідною та другою іноземною мовою як усно, так і письмово.

5. ЗК7. Міжнародний кругозір. Здатність працювати в міжнародному середовищі, ставитися із повагою до національних та культурних традицій, способів роботи інших членів групи.

6. ЗК8. Популяризаційні навички. Вміння спілкуватися із нефахівцями; здатність провести усну презентацію та написати зрозумілу статтю за результатами проведених досліджень, а також щодо сучасних концепцій у прикладній математиці для нефахівців у цій галузі; здатність спілкуватися з експертами з інших галузей.

7. ЗК11. Етичні установки. Етика поведінки в наукових дослідженнях; турбота про якість результату.

8. ЗК12. Особисті якості. Здатність до навчання, саморозвитку та самовдосконалення протягом життя; визначеність і наполегливість щодо поставлених завдань і взятих обов'язків.

Фахові компетентності:

1. ФК1. Знання історії розвитку та сучасного стану наукових досліджень за спеціальністю та обраною спеціалізацією.

2. ФК2. Здатність застосовувати сучасну методологію, загальні та спеціальні методи наукового дослідження за спеціальністю та обраною спеціалізацією.

3. ФК3. Уміння формулювати загальну методологічну базу власного наукового дослідження, усвідомлювати його актуальність, мету і значення для розвитку інших галузей науки.

4. ФК5. Уміння будувати адекватні математичні моделі, досліджувати побудовані моделі та визначати можливості їх застосування.

5. ФК8. Здатність здійснювати дослідження прикладних математичних задач з використанням спеціальних математичних пакетів та аналізувати отримані дані.

6. ФК12. Поглиблені знання з теорії оптимального керування, якісної теорії лінійних керованих систем та основ геометричної теорії нелінійних систем. Здатність застосовувати методи теорії керування до розв'язання задач оптимізації та синтезу законів керування для математичних моделей

динамічних процесів у природничих та технічних науках.

7. ФК13. Поглиблені знання основних методів теорії стійкості руху та якісної теорії динамічних систем. Здатність застосовувати аналітичні та чисельні методи до розв'язання прикладних задач стійкості та стабілізації руху.

8. ФК18. Здатність ефективно аналізувати великі набори різнорідних даних із використанням методів машинного навчання, статистики, штучного інтелекту тощо.

Програмні результати навчання:

1. ПРН1. Знати та розуміти традиційні та передові тенденції в галузі прикладної математики, етапи історичного розвитку математичних знань і парадигм, формування поглибленої системи наукових знань за напрямом досліджень

2. ПРН3. Знати основні принципи, форми та методи проведення наукових досліджень в галузі прикладної математики, володіти математичним апаратом в об'ємі, достатньому для професійної діяльності.

3. ПРН4. Вміти будувати та досліджувати математичні моделі фізичних, соціально-економічних, технічних, біологічних тощо процесів, систем, процесів, формалізувати проблеми, описані природною мовою, за допомогою математичних методів, застосовувати загальні підходи до математичного моделювання конкретних процесів.

4. ПРН6. Вміти пояснювати складні математичні концепції мовою, зрозумілою для нефахівців у галузі математики, представляти результати наукових досліджень на наукових та популяризаційних заходах.

5. ПРН8. Мати навички організації, планування та проведення наукових досліджень самостійно та в групі. Проводити аналіз отриманих результатів (обґрунтування достовірності, формулювання висновків, наукової новизни і практичної значущості).

6. РН9. Вміти організувати неперервний власний саморозвиток і самовдосконалення, набуття гнучкого способу мислення при творчому дослідженні, в тому числі прикладних математичних проблем.

7. ПРН11. Мати ґрунтовні знання з математичної теорії керування, вміти застосовувати їх для розв'язання прикладних задач.

8. ПРН12. Знати основи теорії стійкості руху нелінійних динамічних систем та вміти застосовувати її апарат при дослідженні математичних моделей природничих і технічних наук.

9. ПРН17. Знати основні чисельні методи та алгоритми розв'язання задач прикладної та обчислювальної математики.

За результатами вивчення навчальної дисципліни здобувач доктора філософії повинен:

знати:

- постановки типових задач математичної теорії керування;
- основні принципи теорії оптимального керування;
- методологію застосування принципів теорії керування при розв'язанні прикладних задач;

вміти:

- досліджувати проблеми керованості, спостережуваності, оптимального керування, стабілізації, лінеаризації систем керування, що визначаються звичайними диференціальними рівняннями;
- доводити основні теореми, що входять до програми даного курсу;
- застосовувати сучасні математичні програмні засоби (Matlab, Maple) для синтезу оптимальних стратегій керування;
- конструювати математичні моделі керованих систем у задачах механіки та технічних науках.

3. Програма навчальної дисципліни

Тема 1. Формулювання задач оптимального керування. Основні поняття теорії керування.

Тема 2. Керованість лінійних систем. Множина досяжності. Ранговий критерій Калмана.

Тема 3. Декомпозиція Калмана. Канонічна форма Бруновського лінійної керованої системи.

Тема 4. Стабілізація лінійних систем. Задача про розміщення полюсів замкненої системи.

Тема 5. Зв'язок між властивостями керованості та стабілізованості.

Тема 6. Задача спостереження. Спостерігач Луенбергера.

Тема 7. Теорема двоїстості.

Тема 8. Приклади задач оптимального керування.

Тема 9. Зображення проблеми оптимального керування в гамільтоновій формі. Принцип максимуму Понтрягіна.

Тема 10. Синтез керувань, оптимальних за часом. Геометрична характеристика множини досяжності. Спряжені точки.

Тема 11. Достатні умови оптимальності другого порядку.

Тема 12. Оптимальне керування лінійною системою з квадратичним функціоналом якості.

Тема 13. Динамічне програмування і принцип оптимальності Беллмана. Рівняння Гамільтона-Якобі-Беллмана. Достатні умови оптимальності.

Тема 14. Задача про лінійний регулятор. Рівняння Ріккати.

Тема 15. Задача про точну лінеаризацію систем зі скалярним керуванням. Критерій лінеарізованості Якубчика-Респондека.

4. Структура навчальної дисципліни

Назва теми	Кількість годин			
	Усього	у тому числі		
		Лекції	Практичні заняття	Самостійна робота
1	2	3	4	5
Тема 1. Формулювання задач оптимального керування. Основні поняття теорії керування.	5	2	1	2
Тема 2. Керованість лінійних систем. Множина досяжності. Ранговий критерій Калмана.	8	2	2	4
Тема 3. Декомпозиція Калмана. Канонічна форма Бруновського лінійної керованої системи.	6	2	2	2
Тема 4. Стабілізація лінійних систем. Задача про розміщення полюсів замкненої системи.	8	2	2	4
Тема 5. Зв'язок між властивостями керованості та стабілізованості.	6	2	2	2
Тема 6. Задача спостереження. Спостерігач Луєнбергера.	6	2	2	2
Тема 7. Теорема двоїстості.	5	2	1	2
Тема 8. Приклади задач оптимального керування.	6	2	2	2
Тема 9. Зображення проблеми оптимального керування в гамільтоновій формі. Принцип максимуму Понтрягіна.	6	2	2	2
Тема 10. Синтез керувань, оптимальних за часом. Геометрична характеристика множини досяжності. Спряжені точки.	6	2	2	2
Тема 11. Достатні умови оптимальності другого порядку.	5	2	1	2
Тема 12. Оптимальне керування	6	2	2	2

лінійною системою з квадратичним функціоналом якості.				
Тема 13. Динамічне програмування і принцип оптимальності Беллмана. Рівняння Гамільтона-Якобі-Беллмана. Достатні умови оптимальності.	6	2	2	2
Тема 14. Задача про лінійний регулятор. Рівняння Ріккаті.	6	2	2	2
Тема 15. Задача про точну лінеаризацію систем зі скалярним керуванням. Критерій лінеарізованості Якубчика-Респондека.	5	2	1	2
Усього годин	90	30	26	34

5. Теми практичних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Тема 1. Формулювання задач оптимального керування. Основні поняття теорії керування.	1
2	Тема 2. Керованість лінійних систем. Множина досяжності. Ранговий критерій Калмана.	2
3	Тема 3. Декомпозиція Калмана. Канонічна форма Бруновського лінійної керованої системи.	2
4	Тема 4. Стабілізація лінійних систем. Задача про розміщення полюсів замкненої системи.	2
5	Тема 5. Зв'язок між властивостями керованості та стабілізованості.	2
6	Тема 6. Задача спостереження. Спостерігач Луенбергера.	2
7	Тема 7. Теорема двоїстості.	1
8	Тема 8. Приклади задач оптимального керування.	2
9	Тема 9. Зображення проблеми оптимального керування в гамільтоновій формі. Принцип максимуму Понтрягіна.	2
10	Тема 10. Синтез керувань, оптимальних за часом. Геометрична характеристика множини досяжності. Спряжені точки.	2
11	Тема 11. Достатні умови оптимальності другого порядку.	1
12	Тема 12. Оптимальне керування лінійною системою з	2

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
	квадратичним функціоналом якості.	
13	Тема 13. Динамічне програмування і принцип оптимальності Беллмана. Рівняння Гамільтона-Якобі-Беллмана. Достатні умови оптимальності.	2
14	Тема 14. Задача про лінійний регулятор. Рівняння Ріккати.	2
15	Тема 15. Задача про точну лінеаризацію систем зі скалярним керуванням. Критерій лінеарізованості Якубчика-Респондека.	1
	Разом	26

6. Теми для самостійної роботи

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Тема 1. Формулювання задач оптимального керування. Основні поняття теорії керування.	2
2	Тема 2. Керованість лінійних систем. Множина досяжності. Ранговий критерій Калмана.	4
3	Тема 3. Декомпозиція Калмана. Канонічна форма Бруновського лінійної керованої системи.	2
4	Тема 4. Стабілізація лінійних систем. Задача про розміщення полюсів замкненої системи.	4
5	Тема 5. Зв'язок між властивостями керованості та стабілізованості.	2
6	Тема 6. Задача спостереження. Спостерігач Луенбергера.	2
7	Тема 7. Теорема двоїстості.	2
8	Тема 8. Приклади задач оптимального керування.	2
9	Тема 9. Зображення проблеми оптимального керування в гамільтоновій формі. Принцип максимуму Понтрягіна.	2
10	Тема 10. Синтез керувань, оптимальних за часом. Геометрична характеристика множини досяжності. Спряжені точки.	2
11	Тема 11. Достатні умови оптимальності другого порядку.	2
12	Тема 12. Оптимальне керування лінійною системою з квадратичним функціоналом якості.	2
13	Тема 13. Динамічне програмування і принцип оптимальності Беллмана. Рівняння Гамільтона-Якобі-Беллмана. Достатні умови оптимальності.	2
14	Тема 14. Задача про лінійний регулятор. Рівняння	2

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
	Ріккаті.	
15	Тема 15. Задача про точну лінеаризацію систем зі скалярним керуванням. Критерій лінеарізованості Якубчика-Респондека.	2
	Разом	34

7. Методи навчання

При викладанні навчальної дисципліни «Теорія керування детермінованими динамічними системами» використовуються такі методи навчання: метод проблемного навчання, евристичне навчання, модульно-рейтингова система навчання.

8. Методи контролю

Використовуються наступні методи контролю:

1. Поточний контроль знань:

- усне опитування;
- виконання практичних робіт;
- тестування;
- виконання дослідницьких завдань.

2. Підсумковий контроль знань (іспит):

- підсумковий тест або екзаменаційні білети.

9. Критерії оцінювання результатів навчання

Розподіл балів, які отримує аспірант

Аудиторна робота																Самостійна робота	Підсумковий контроль (іспит)	Загальна кількість отриманих балів
теми																		
T1	T2	T3	T4	T5	T5	T6	T7	T8	T9	T10	T11	T12	T13	T14	T15			
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	15	40	100

Шкала оцінювання

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка за національною шкалою
	для іспиту
90-100	«відмінно» - здобувач повно і всебічно розкриває питання теми, вільно оперує поняттями і термінологією, демонструє глибокі знання джерел, має власну точку зору стосовно відповідної теми і може аргументовано її доводити
75-89	«добре» - загалом рівень знань здобувачів відповідає викладеному вище, але мають місце деякі упущення при виконанні завдань, обґрунтування неточні, не підтверджуються достатньо обґрунтованими доказами
60-74	«задовільно» - здобувач розкрив питання, в загальних рисах, розуміє їх суть, намагається робити висновки, але при цьому припускається грубих помилок, матеріал викладає нелогічно і не самостійно
35-59	«незадовільно» - з можливістю повторного складання, здобувач не в змозі дати відповідь на поставлене запитання або відповідь неправильна, не розуміє суті питання, не може зробити висновки
0-34	«незадовільно» - з обов'язковим повторним вивченням дисципліни

10. Орієнтовний перелік питань до підсумкового контролю (іспиту)

1. Ранговий критерій керованості Калмана лінійних систем.
2. Декомпозиція Калмана.
3. Нормальна форма Бруновського лінійної керованої системи.
4. Задача спостерігання. Критерій спостережуваності Калмана лінійної системи.
5. Спостерігач Луенбергера.
6. Теорема двоїстості (зв'язок між властивостями керованості та спостережуваності).
7. Стабілізація лінійних систем. Зв'язок між властивостями керованості та стабілізованості.
8. Стабілізація з використанням системи-спостерігача.
9. Постановка задач оптимального керування.
10. Принцип максимуму Понтрягіна з інтегральним функціоналом в загальній формі (без доведення).
11. Принцип максимуму Понтрягіна для випадку оптимальності за часом (без доведення).
12. Принцип оптимальності Беллмана. Рівняння Беллмана.

13. Оптимальне керування для лінійної системи з квадратичним функціоналом якості (задача про лінійний регулятор). Рівняння Ріккати.
14. Задача про лінійний регулятор для . Використання лінійного регулятора для розв'язання задачі стабілізації.
15. Дужки Лі. Рангова умова досяжності.
16. Теорема керованості Чжоу–Рашевського.
17. Теорема про орбіти.
18. Точна лінеаризація систем з керуванням. Критерій Якубчика–Респондека.

11. Рекомендована література

Основна література дисципліни

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. 2-е изд. – М.: Наука, 1969. – 384с.
2. Trélat E. Control in Finite and Infinite Dimension. – Springer, 2024. – 138 p. <https://doi.org/10.1007/978-981-97-5948-4>
3. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. – М.: Наука, 1972. – 576с.
4. Флеминг У., Ришел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. – М.: Мир, 1978. - 316с.
5. Agrachev A.A., Sachkov Y.L. Control Theory from the Geometric Viewpoint. – Springer, 2004. – 412 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-06404-7>
6. Уонэм М. Линейные многомерные системы управления. – М.: Наука, 1980. – 376с.
7. Брокетт Р. Нелинейные системы и дифференциальная геометрия // ТИИЭР. – 1976. – Т.64. - № 1. – С.80-94.

Допоміжна література дисципліни

1. Hernández-Lerma O. et al. An introduction to optimal control theory. – Springer, 2023. – 273 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-21139-3>
2. Lavretsky A., Wise K.A. Robust and Adaptive Control with Aerospace Applications. - Springer, 2024. - 710 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-38314-4>
3. Зубов В.И. Лекции по теории управления. – М.: Наука, 1975. – 496 с.
4. Isidori A. Nonlinear Control Systems: An Introduction. London: Springer-Verlag, 1995. –549 p.
5. Sontag E.D. Mathematical Control Theory. 2nd Ed. – New York: Springer, 1998. – 532 p.