

**НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ**

«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Директор ІПММ НАН України
академік НАН України



Ігор СКРИПНІК
«25» вересня 2025 р.

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

**QUASICONFORMAL ANALYSIS AND BOUNDARY VALUE
PROBLEMS OF MATHEMATICAL PHYSICS**

**підготовки здобувачів ступеня вищої освіти
треть (освітньо-науковий)
доктора філософії**

галузь знань 11 Математика та статистика

спеціальність 111 Математика

Черкаси – 2025 р.

Робоча навчальна програма навчальної дисципліни «Quasiconformal analysis and boundary value problems of mathematical physics» для здобувачів наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 Математика

Розробник:

Гутлянський Володимир Якович , радник при дирекції, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., професор ІПММ НАН України

Робочу програму схвалено на засіданні відділу теорії функцій

Протокол № 3 від 17.09.2025 року.

Завідувач відділу
д.ф.-м.н., проф.



В.І. Рязанов

Схвалено Науково-методичною радою Інституту прикладної математики і механіки НАН України

Протокол № 4 від 22.09.2025 року.

Голова науково-методичної ради



О.В. Несмелова

1. Опис навчальної дисципліни

Найменування показників	Галузь знань, напрям підготовки, освітньо-кваліфікаційний рівень	Характеристика навчальної дисципліни
Кількість кредитів - 3	Галузь знань: 11 Математика та статистика	Обов'язкова
Загальна кількість годин – 90	Спеціальність: 111 Математика	Рік підготовки:
		I
		Семестр
		1-2
		Лекції
Тижневих годин: аудиторних – 2 самостійної роботи – 0,9	Освітньо-кваліфікаційний рівень: доктор філософії	30 год
		Практичні
		26 год
		Самостійна робота
		34 год
		Вид контролю: іспит

1. Мета, завдання та очікувані результати навчальної дисципліни.

Метою навчальної дисципліни «Quasiconformal analysis and boundary value problems of mathematical physics» є поглиблене вивчення теорії квазіконформних відображень на площині, їх основних властивостей і застосувань, а також теорії тісно пов'язаного з ними рівняння Бельтрамі. яке є комплексною формою запису одного з основних рівнянь математичної фізики в неоднорідних і анізотропних середовищах.

Завдання навчальної дисципліни «Quasiconformal analysis and boundary value problems of mathematical physics» є оволодіння основними аналітичними та геометричними методами дослідження квазіконформних відображень на площині, вивчення їх основних властивостей і застосувань, встановлення взаємозв'язку з рівняннями Бельтрамі і рівняннями математичної фізики в неоднорідних і анізотропних середовищах.

Очікувані результати навчальної дисципліни

Загальні компетентності:

1. Аналіз і синтез. Здатність до аналізу та синтезу на основі логічних аргументів та перевірених фактів; навички управління інформацією (уміння знаходити та аналізувати інформацію з різних джерел) (ЗК 1).
2. Дослідницька здатність. Компетентності ініціювати та виконувати (індивідуально або в науковій групі) наукові дослідження, що приводять до отримання нових знань; здатність застосовувати знання на практиці. (ЗК 2).
3. Комунікативні навички. Здатність ефективно спілкуватися із спеціальною та загальною аудиторіями, а також представляти складну інформацію у зручний та зрозумілий спосіб усно і письмово, використовуючи відповідну технічну лексику та методи; навички використання інформаційних і комунікаційних технологій; здатність спілкуватися рідною та другою іноземною мовою як усно, так і письмово (ЗК 6).
4. Міжнародний кругозір. Здатність працювати в міжнародному середовищі, ставитися із повагою до національних та культурних традицій, способів роботи інших членів групи (ЗК 7).
5. Популяризаційні навички. Вміння спілкуватися із нефахівцями; здатність провести усну презентацію та написати зрозумілу статтю за результатами проведених досліджень, а також щодо сучасних концепцій у математиці для нефахівців у цій галузі (ЗК 8).
6. Етичні установки. Етика поведінки в наукових дослідженнях; турбота про якість результату (ЗК 11).
7. Особисті якості. Здатність до навчання, саморозвитку та самовдосконалення протягом життя; визначеність і наполегливість щодо поставлених завдань і взятих обов'язків (ЗК 12).

Фахові компетентності:

1. Знання історії розвитку та сучасного стану наукових знань за спеціальністю та обраною спеціалізацією (ФК 1).
2. Здатність застосовувати сучасну методологію, загальні та спеціальні методи наукового дослідження за спеціальністю та обраною спеціалізацією (ФК 2).
3. Здатність логічно мислити, формулювати, строго доводити та перевіряти правильність математичних тверджень (ФК 4).
4. Здатність до висунення нових ідей, розв'язання міждисциплінарних та прикладних задач (ФК 8).
5. Оволодіння загальними методами, теоретичними положеннями та основними застосуваннями теорії квазіконформних відображень на площині (ФК 9).
6. Оволодіння традиційними та сучасними математичними методами дослідження та застосуваннями рівняння Бельтрамі (ФК 10).
7. Здатність застосовувати спеціальні методи в теорії відображень та теорії аналітичних функцій і їх узагальнень (ФК 11).
8. Оволодіння основними поняттями, підходами та принципами сучасних розділів функціонального аналізу, рівнянь математичної фізики та теорії диференціальних рівнянь, застосування абстрактних методів при розв'язанні задач (ФК 12).

Програмні результати навчання:

1. Знати та розуміти традиційні та передові тенденції в галузі математики, етапи історичного розвитку математичних знань і парадигм, формування поглибленої системи наукових знань за напрямом досліджень (ПРН 1).
2. Знати основні принципи, форми та методи проведення наукових досліджень в галузі математики, володіти математичним апаратом в об'ємі, достатньому для професійної діяльності (ПРН 3).
3. Вміти за допомогою теоретичного математичного апарату досліджувати різноманітні природні явища та процеси, проводити аналіз впливу на них різних факторів, а також вивчати взаємодію між явищами з метою отримання переконливо доведених і корисних фундаментальних та практичних результатів (ПРН 5).
4. Здійснювати професійну письмову й усну комунікацію українською та іноземними мовами. Уміти працювати зі спеціальною літературою та наукометричними базами даних, в тому числі іноземною мовою (ПРН 8).
5. Вміти організувати неперервний власний саморозвиток і самовдосконалення, набуття гнучкого способу мислення при творчому дослідженні, в тому числі прикладних математичних проблем (ПРН 10).
6. Вміти формулювати наукові проблеми з огляду на цінні стін орієнтири сучасного суспільства та стану її поточного дослідження (ПРН 11).
7. Розв'язувати фундаментальні та прикладні задачі придатними математичними методами, перевіряти умови виконання математичних

тверджень, коректно переносити умови та твердження на нові класи об'єктів, знаходити й аналізувати відповідності між поставленою задачею й відомими моделями, будувати та досліджувати нові математичні моделі (ПРН 12).

8. Знати теоретичні основи і застосовувати спеціальні методи дослідження в теорії функцій комплексного змінного та теорії квазіконформних відображень (ПРН 13).

9. Володіти основними аналітичними та геометричними методами дослідження аналітичних функцій і вивчення їх основних властивостей (ПРН 14).

10. Поглиблені знання з теорії збіжності і компактності квазіконформних відображень в контексті інфінітезімального аналізу їх локальної і граничної поведінки (ПРН 15).

За результатами вивчення навчальної дисципліни здобувач доктора філософії повинен:

знати:

- Аналітичне означення квазіконформних відображень як гомеоморфних розв'язків рівнянь Бельтрамі, теореми існування і єдиності при відповідних нормуваннях в рівномірно еліптичному випадку.
- Еквівалентність аналітичного означення з геометричними означеннями квазіконформних відображень і їх основні властивості, локальна гельдеровість, квазіконформні криві.
- Зображення квазіконформних функцій у вигляді композиції аналітичних функцій і квазіконформних відображень, зв'язок рівняння Бельтрамі з одним з основних рівнянь математичної фізики

вміти:

- Володіти основами теорії сингулярних операторів Кальдерона-Зигмунда на площині та застосовувати їх до доведення теорем існування рішень рівнянь Бельтрамі та їх властивостей.
- Оволодіння методом модулів сімейств кривих і застосування цього методу до дослідження локальних і граничних властивостей квазіконформних відображень.
- Вміти використовувати теорію квазіконформних відображень на площині до дослідження рівнянь математичної фізики.

2. Програма навчальної дисципліни

Тема 1. Grotzsch's mapping problem and Quasiconformal Diffeomorphisms

Тема 2. Conformal invariants and Geometric definition of quasiconformality

Тема 3. Absolute continuity and differentiability, analytic definition of quasiconformality

Тема 4. Complex dilatation

Тема 5. Generalized derivatives and Sobolev spaces

Тема 6. Imbedding theorems

Тема 7. Conformal structures on surfaces and the Beltrami equation

Тема 8. Quasiconformal maps and the Beltrami equation

Тема 9. Bojarski's representation formula

Тема 10. Measurable Riemann mapping theorem

Тема 11. Decomposition of qc mappings

Тема 12. Dependence on a parameter

Тема 13. Holomorphic motions

Тема 14. Partial cases of integrability

3. Структура навчальної дисципліни

Назва теми	Кількість годин			
	Усього	у тому числі		
		Лекції	Практичні заняття	Самостійна робота
1	2	3	4	5
Тема 1. Grotzsch's mapping problem and Quasiconformal Diffeomorphisms	6	2	2	2
Тема 2. Conformal invariants and Geometric definition of quasiconformality	8	2	2	4
Тема 3. Absolute continuity and differentiability, analytic definition of quasiconformality	5	2	1	2
Тема 4. Complex dilatation	8	2	2	4
Тема 5. Generalized derivatives and Sobolev spaces	6	2	2	2
Тема 6. Imbedding theorems	6	2	2	2
Тема 7. Conformal structures on surfaces and the Beltrami equation	8	2	2	4
Тема 8. Quasiconformal maps and the Beltrami equation	8	4	2	2
Тема 9. Bojarski's representation formula	5	2	1	2
Тема 10. Measurable Riemann mapping theorem	6	2	2	2
Тема 11. Decomposition of qc mappings	6	2	2	2
Тема 12. Dependence on a parameter	6	2	2	2
Тема 13. Holomorphic motions	6	2	2	2
Тема 14. Partial cases of integrability	6	2	2	2
Усього годин	90	30	26	34

4. Теми практичних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Extremal length and modulus of a curve family	2
2	Modulus of a circular annulus and modulus of a rectangle	2
3	Modulus of quadrilaterals and ring domains, Grötzsch's and Teichmüller's modulus theorem	1
4	Diameter estimates	2
5	Dilatation condition of quasiconformality	2
6	Integrability condition of quasiconformality	2
7	Pointwise dilatation of quasiconformal mappings	2
8	Astala's regularity theorem	2
9	Reich–Walczak's type integral modulus estimates	1
10	General convergence properties	2
11	Equicontinuity properties	2
12	Dilatation and convergence	2
13	Cauchy and Hilbert transformations	2
14	Examples of quasiconformal mappings	2
	Разом	26

5. Теми для самостійної роботи

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Extremal length and modulus of a curve family	2
2	Modulus of a circular annulus and modulus of a rectangle	4
3	Modulus of quadrilaterals and ring domains, Grötzsch's and Teichmüller's modulus theorem	2
4	Diameter estimates	4
5	Dilatation condition of quasiconformality	2
6	Integrability condition of quasiconformality	2
7	Pointwise dilatation of quasiconformal mappings	4
8	Astala's regularity theorem	2
9	Reich–Walczak's type integral modulus estimates	2
10	General convergence properties	2
11	Equicontinuity properties	2
12	Dilatation and convergence	2
13	Cauchy and Hilbert transformations	2
14	Examples of quasiconformal mappings	2
	Разом	34

6. Методи навчання

При викладанні навчальної дисципліни «Beltrami Equation: Geometric Approach» використовуються такі методи навчання: проблемно-пошуковий, пояснювально-ілюстративний, дослідницький, пошуковий, тощо. Освітній процес побудований на принципах особистісно орієнтованого навчання, на основі компетентнісного, системного, підходів що складає: проблемно-орієнтоване навчання; індивідуальні консультації фахівців Інституту прикладної математики і механіки НАН України, інших установ НАН України.

8. Методи контролю

Використовуються наступні методи контролю:

1. Поточний контроль знань:
 - усне опитування;
 - виконання практичних робіт;
 - тестування;
 - виконання дослідницьких завдань.
2. Підсумковий контроль знань (іспит):
 - підсумковий тест або екзаменаційні білети.

9. Критерії оцінювання результатів навчання

Розподіл балів, які отримує аспірант

Аудиторна робота														Самостійна робота	Підсумковий контроль (іспит)	Загальна кількість отриманих балів
теми																
T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10	T11	T12	T13	T14			
3	4	3	3	3	3	4	3	3	3	3	3	3	4	15	40	100

Шкала оцінювання

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка за національною шкалою
	для іспиту
90-100	«відмінно» - здобувач повно і всебічно розкриває питання теми, вільно оперує поняттями і термінологією, демонструє глибокі знання джерел, має власну точку зору стосовно відповідної теми і може аргументовано її доводити
75-89	«добре» - загалом рівень знань здобувачів відповідає викладеному вище, але мають місце деякі упущення при виконанні завдань, обґрунтування неточні, не підтверджуються достатньо обґрунтованими доказами
60-74	«задовільно» - здобувач розкрив питання, в загальних рисах, розуміє їх суть, намагається робити висновки, але при цьому припускається грубих помилок, матеріал викладає нелогічно і не самостійно
35-59	«незадовільно» - з можливістю повторного складання, здобувач не в змозі дати відповідь на поставлене запитання або відповідь неправильна, не розуміє суті питання, не може зробити висновки
0-34	«незадовільно» - з обов'язковим повторним вивченням дисципліни

10. Орієнтовний перелік питань до підсумкового контролю (іспиту)

1. Grotzsch's mapping problem and Quasiconformal Diffeomorphisms
2. Conformal invariants and Geometric definition of quasiconformality
3. Absolute continuity and differentiability, analytic definition of quasiconformality
4. Complex dilatation
5. Generalized derivatives and Sobolev spaces
6. Imbedding theorems
7. Conformal structures on surfaces and the Beltrami equation
8. Quasiconformal maps and the Beltrami equation
9. Bojarski's representation formula
10. Measurable Riemann mapping theorem
11. Decomposition of qc mappings
12. Dependence on a parameter
13. Holomorphic motions
14. Partial cases of integrability
15. Extremal length and modulus of a curve family
16. Modulus of a circular annulus and modulus of a rectangle
17. Modulus of quadrilaterals and ring domains, Grötzsch's and Teichmüller's modulus theorem
18. Diameter estimates

19. Dilatation condition of quasiconformality
20. Integrability condition of quasiconformality
21. Pointwise dilatation of quasiconformal mappings
22. Astala's regularity theorem
23. Reich–Walczak's type integral modulus estimates
24. General convergence properties
25. Equicontinuity properties
26. Dilatation and convergence
27. Cauchy and Hilbert transformations
28. Examples of quasiconformal mappings

12. Рекомендована література

Основна література дисципліни

1. Ahlfors L.V. Lectures on quasiconformal mappings. Van Nostrand Math. Stud., No. 10 D. Van Nostrand Co., Inc., Toronto, Ont.-New York-London, 1966.
2. Astala K., Iwaniec T., Martin G. Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in the plane. Princeton Mathematical Series, 48. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009. ISBN 978-0-691-13777-3
3. Bojarski B., Gutlyanskii V., Martio O., Ryazanov V. Infinitesimal geometry of quasiconformal and bi-Lipschitz mappings in the plane. EMS Tracts in Mathematics, 19. European Mathematical Society, Zürich, 2013. ISBN: 978-3-03719-122-4
4. Gehring F.W., Martin G.J., Palka B.P. An introduction to the theory of higher-dimensional quasiconformal mappings. Math. Sur. Mon., 216. AMS, Providence, RI, 2017. ISBN: 978-0-8218-4360-4
5. Gol'dshtein V.M., Reshetnyak Yu.G. Quasiconformal mappings and Sobolev spaces. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1990. ISBN: 0-7923-0543-4
6. Lehto O., Virtanen K.I. Quasiconformal mappings in the plane. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973.
7. Väisälä J. Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings. Lect. Notes in Math., Vol. 229. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.

Допоміжна література дисципліни

1. Caraman P. n -dimensional quasiconformal mappings. Haessner Publishing, Inc., Newfoundland, N.J., 1974.
2. Renelt H. Elliptic systems and quasiconformal mappings. Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1988.
3. Vasil'ev A. Moduli of families of curves for conformal and quasiconformal mappings. Lect. Notes in Math., 1788. Springer-Verlag, Berlin, 2002. ISBN: 3-540-43846-7
4. Волковиський Л.І. Квазіконформні відображення. Вид. Львівського університету, 1954.
5. Krushkal S.L. Quasiconformal Mappings and Riemann Surfaces (Scripta Series in Mathematics), Published by John Wiley & Sons Inc, 1979.