

**НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ**

«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Директор ІПММ НАН України
академік НАН України

Ігор СКРИПНІК

«25» вересня 2025 р.



РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

**Якісні методи дослідження вироджених та
сингулярних параболічних рівнянь**

**підготовки здобувачів ступеня вищої освіти
третій (освітньо-науковий)
доктора філософії**

галузь знань 11 Математика та статистика

спеціальність 111 Математика

Черкаси – 2025 р.

Робоча навчальна програма навчальної дисципліни «Якісні методи дослідження вироджених та сингулярних параболічних рівнянь» для здобувачів наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 Математика

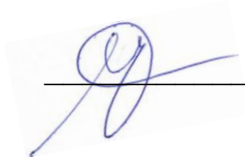
Розробник:

Скрипнік Ігор Ігорович, директор, завідувач відділу нелінійного аналізу та рівнянь математичної фізики Інституту прикладної математики і механіки НАН України, доктор фізико-математичних наук, доцент, академік НАН України

Робочу програму схвалено на засіданні відділу нелінійного аналізу та рівнянь математичної фізики

Протокол № 2 від 18.09.2025 року.

Завідувач відділу



І.І. Скрипнік

Схвалено Науково-методичною радою Інституту прикладної математики і механіки НАН України

Протокол № 4 від 22 вересня 2025 року.

Голова науково-методичної ради



О.В. Несмелова

1. Опис навчальної дисципліни

Найменування показників	Галузь знань, напрям підготовки, освітньо-кваліфікаційний рівень	Характеристика навчальної дисципліни	
Кількість кредитів - 4	Галузь знань: 11 Математика та статистика	Вибіркова	
Загальна кількість годин – 120	Спеціальність: 111 Математика	Рік підготовки:	
		1-2	
		Семестр	
		2-й	3-й
		Лекції	
Тижневих годин: аудиторних – 1,5; самостійної роботи – 1,7	Освітньо-кваліфікаційний рівень: доктор філософії	14	14
		Практичні	
		14	14
		Самостійна робота	
		32	32
		Вид контролю: іспит	

2. Мета, завдання та очікувані результати навчальної дисципліни.

Метою вивчення навчальної дисципліни «Якісні методи дослідження вироджених та сингулярних параболічних рівнянь» є комплексний розгляд нерівності Харнака для невід’ємних розв’язків рівнянь типу р-Лапласа та пористого середовища, починаючи від поняття розв’язку та створення всіх необхідних технічних засобів.

Основними завданнями вивчення дисципліни «Нерівність Харнака для вироджених та сингулярних параболічних рівнянь» є:

- опанувати основні поняття та теореми курсу;
- оволодіти основними методами отримання нерівності Харнака для вироджених та сингулярних параболічних рівнянь.

Очікувані результати навчальної дисципліни

Загальні компетентності:

1. Аналіз і синтез. Здатність до аналізу та синтезу на основі логічних аргументів та перевірених фактів; навички управління інформацією (уміння знаходити та аналізувати інформацію з різних джерел) (ЗК1).

2. Дослідницька здатність. Компетентності ініціювати та виконувати (індивідуально або в науковій групі) наукові дослідження, що приводять до отримання нових знань; здатність застосовувати знання на практиці (ЗК2).
3. Гнучкість мислення. Набуття гнучкого способу мислення, який дає можливість зрозуміти й розв'язати проблеми та задачі, зберігаючи при цьому критичне відношення до усталених наукових концепцій (ЗК3).
4. Комунікативні навички. Здатність ефективно спілкуватися із спеціальною та загальною аудиторіями, а також представляти складну інформацію у зручний та зрозумілий спосіб усно і письмово, використовуючи відповідну технічну лексику та методи; навички використання інформаційних і комунікаційних технологій; здатність спілкуватися рідною та другою іноземною мовою як усно, так і письмово (ЗК6).
5. Міжнародний кругозір. Здатність працювати в міжнародному середовищі, ставитися із повагою до національних та культурних традицій, способів роботи інших членів групи (ЗК7).
6. Популяризаційні навички. Вміння спілкуватися із нефаківцями; здатність провести усну презентацію та написати зрозумілу статтю за результатами проведених досліджень, а також щодо сучасних концепцій у математиці для нефаківців у цій галузі; здатність спілкуватися з експертами з інших галузей (ЗК8).
7. Етичні установки. Етика поведінки в наукових дослідженнях; турбота про якість результату (ЗК11).
8. Особисті якості. Здатність до навчання, саморозвитку та самовдосконалення протягом життя; визначеність і наполегливість щодо поставлених завдань і взятих обов'язків (ЗК 12).

Фахові компетентності (згідно до переліку фахових компетентностей освітньої програми):

1. Здатність застосовувати сучасну методологію, загальні та спеціальні методи наукового дослідження за спеціальністю та обраною спеціалізацією (ФК 2).
2. Здатність логічно мислити, формулювати, строго доводити та перевіряти правильність математичних тверджень (ФК 4).
3. Оволодіння основними поняттями, підходами та принципами сучасних розділів функціонального аналізу, рівнянь математичної фізики та теорії диференціальних рівнянь, застосування абстрактних методів при розв'язанні задач (ФК 12).
4. Оволодіння сучасними методами теорії граничних задач, теорії узагальнених функцій, теорії операторів (ФК 13).

Програмні результати навчання (згідно до переліку програмних результатів навчання освітньої програми):

1. Знати та розуміти традиційні та передові тенденції в галузі математики, етапи історичного розвитку математичних знань і парадигм, формування поглибленої системи наукових знань за напрямом досліджень (ПРН-1).
2. Знати основні принципи, форми та методи проведення наукових досліджень в галузі математики, володіти математичним апаратом в об'ємі, достатньому для професійної діяльності (ПРН-3).
3. Вміти за допомогою теоретичного математичного апарату досліджувати різноманітні природні явища та процеси, проводити аналіз впливу на них різних факторів, а також вивчати взаємодію між явищами з метою отримання переконливо доведених і корисних фундаментальних та практичних результатів (ПРН-5).
4. Здійснювати професійну письмову й усну комунікацію українською та іноземними мовами. Уміти працювати зі спеціальною літературою та наукометричними базами даних, в тому числі іноземною мовою (ПРН-8).
5. Вміти організувати неперервний власний саморозвиток і самовдосконалення, набуття гнучкого способу мислення при творчому дослідженні, в тому числі прикладних математичних проблем (ПРН-10).
6. Вміти формулювати наукові проблеми з огляду на цінні стін орієнтири сучасного суспільства та стану її поточного дослідження (ПРН-11).
7. Розв'язувати фундаментальні та прикладні задачі придатними математичними методами, перевіряти умови виконання математичних тверджень, коректно переносити умови та твердження на нові класи об'єктів, знаходити й аналізувати відповідності між поставленою задачею й відомими моделями, будувати та досліджувати нові математичні моделі (ПРН-12).
8. Знати теоретичні основи і застосовувати методи сучасної теорії диференціальних рівнянь та теорії нелінійних коливань для розв'язування фундаментальних та прикладних задач (ПРН-16).
9. Знати теоретичні основи і застосовувати методи сучасної наукової теорії функціонального аналізу, основні властивості диференціальних операторів, узагальнених функцій і вміння ефективно застосовувати їх для синтезу і аналізу складних систем та явищ (ПРН-17).
10. Знати теоретичні основи і застосовувати сучасні методи математичної фізики для моделювання реальних фізичних, біологічних, екологічних, соціально-економічних та інших процесів і явищ (ПРН-19).

За результатами вивчення навчальної дисципліни здобувач доктора філософії повинен:

знати:

- основні поняття і теореми курсу;

- методи отримання нерівності Харнака для вироджених та сингулярних параболічних рівнянь.

уміти :

- розв'язувати стандартні задачі, доводити основні теореми курсу;
- використовувати отримані теоретичні знання в самостійних дослідженнях.

3. Програма навчальної дисципліни

Змістовий модуль 1. Леми типу Де Джорджі

Тема 1. Локальні енергетичні оцінки $(u - k)_\pm$

Тема 2. Лема типу Де Джорджі для параболічного рівняння p -Лапласу.

Тема 3. Варіант леми типу Де Джорджі, що включає “початкові” дані.

Тема 4. Лема типу Де Джорджі для рівняння пористого середовища, випадки $m > 1$ та $m < 1$.

Змістовий модуль 2. Поширення позитивності

Тема 1. Поширення позитивності для виродженого параболічного рівняння p -Лапласу.

Тема 2. Поширення позитивності для сингулярного параболічного рівняння p -Лапласу.

Тема 3. Поширення позитивності для рівняння пористого середовища, випадки $m > 1$ та $m < 1$.

Змістовий модуль 3. Нерівність Харнаку

Тема 1. Нерівність Харнаку для виродженого параболічного рівняння p -Лапласу.

Тема 2. Нерівність Харнаку для сингулярного параболічного рівняння p -Лапласу. Еліптична форма нерівності Харнаку.

Тема 3. Нерівність Харнаку для рівняння пористого середовища, випадки $m > 1$ та $m < 1$.

Тема 4. Нерівність Харнаку для критичних та субкритичних сингулярних рівнянь.

Тема 5. $L_{loc}^r - L_{loc}^\infty$ форма нерівності Харнаку.

Тема 6. Назад у часі L_{loc}^r оцінки для розв'язків критичних та субкритичних сингулярних рівнянь.

Тема 7. Наслідки нерівності Харнаку: локальна Гельдеровість, теорема Ліувілля, слабка форма нерівності Харнаку, нижні оцінки розв’язків типу Баренблатту.

4. Структура навчальної дисципліни

Назва теми	Кількість годин			
	Усього	у тому числі		
		Лекції	Практичні заняття	Самостійна робота
1	2	3	4	5
Змістовий модуль 1. Леми типу Де Джорджі				
Тема 1. Локальні енергетичні оцінки $(u-k)_{\pm}$	7	2	2	3
Тема 2. Лема типу Де Джорджі для параболічного рівняння р-Лапласу.	7	2	2	3
Тема 3. Варіант леми типу Де Джорджі, що включає “початкові” дані.	7	2	2	3
Тема 4. Лема типу Де Джорджі для рівняння пористого середовища, випадки $m > 1$ та $m < 1$.	9	2	2	5
Змістовий модуль 2. Поширення позитивності				
Тема 1. Поширення позитивності для виродженого параболічного рівняння р-Лапласу.	9	2	2	5
Тема 2. Поширення позитивності для сингулярного параболічного рівняння р-Лапласу.	9	2	2	5
Тема 3. Поширення позитивності для рівняння	9	2	2	5

пористого середовища, випадки $m > 1$ та $m < 1$.				
Змістовий модуль 3. Нерівність Харнаку				
Тема 1. Нерівність Харнаку для виродженого параболічного рівняння p -Лапласу.	9	2	2	5
Тема 2. Нерівність Харнаку для сингулярного параболічного рівняння p -Лапласу. Еліптична форма нерівності Харнаку.	9	2	2	5
Тема 3. Нерівність Харнаку для рівняння пористого середовища, випадки $m > 1$ та $m < 1$.	9	2	2	5
Тема 4. Нерівність Харнаку для критичних та субкритичних сингулярних рівнянь.	9	2	2	5
Тема 5. $L_{loc}^r - L_{loc}^\infty$ форма нерівності Харнаку.	9	2	2	5
Тема 6. Назад у часі L_{loc}^r оцінки для розв'язків критичних та субкритичних сингулярних рівнянь.	9	2	2	5
Тема 7. Наслідки нерівності Харнаку: локальна Гельдеровість, теорема Ліувілля, слабка форма нерівності Харнаку, ніжні оцінки розв'язків типу Баренблатту.	9	2	2	5
Усього годин	120	28	28	64

5. Теми практичних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
Змістовий модуль 1. Леми типу Де Джорджі		
1	Локальні енергетичні оцінки $(u - k)_\pm$	2
2	Лема типу Де Джорджі для параболічного рівняння p -Лапласу.	2
3	Варіант леми типу Де Джорджі, що включає "початкові" дані.	2

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
4	Лема типу Де Джорджі для рівняння пористого середовища, випадки $m > 1$ та $m < 1$.	2
Змістовий модуль 2. Поширення позитивності		
1	Поширення позитивності для виродженого параболічного рівняння р-Лапласу.	2
2	Поширення позитивності для сингулярного параболічного рівняння р-Лапласу.	2
3	Поширення позитивності для рівняння пористого середовища, випадки $m > 1$ та $m < 1$.	2
Змістовий модуль 3. Нерівність Харнаку		
1	Нерівність Харнаку для виродженого параболічного рівняння р-Лапласу.	2
2	Нерівність Харнаку для сингулярного параболічного рівняння р-Лапласу. Еліптична форма нерівності Харнаку.	2
3	Нерівність Харнаку для рівняння пористого середовища, випадки $m > 1$ та $m < 1$.	2
4	Нерівність Харнаку для критичних та субкритичних сингулярних рівнянь.	2
5	$L_{loc}^r - L_{loc}^\infty$ форма нерівності Харнаку.	2
6	Назад у часі L_{loc}^r оцінки для розв'язків критичних та субкритичних сингулярних рівнянь.	2
7	Наслідки нерівності Харнаку: локальна Гельдеровість, теорема Ліувілля, слабка форма нерівності Харнаку, ніжні оцінки розв'язків типу Баренблатту.	2
	Разом	28

6. Теми для самостійної роботи

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
Змістовий модуль 1. Леми типу Де Джорджі		
1	Локальні енергетичні оцінки $(u-k)_\pm$	3

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
2	Лема типу Де Джорджі для параболічного рівняння р-Лапласу.	3
3	Варіант леми типу Де Джорджі, що включає “початкові” дані.	3
4	Лема типу Де Джорджі для рівняння пористого середовища, випадки $m > 1$ та $m < 1$.	5
Змістовий модуль 2. Поширення позитивності		
1	Поширення позитивності для виродженого параболічного рівняння р-Лапласу.	5
2	Поширення позитивності для сингулярного параболічного рівняння р-Лапласу.	5
3	Поширення позитивності для рівняння пористого середовища, випадки $m > 1$ та $m < 1$.	5
Змістовий модуль 3. Нерівність Харнаку		
1	Нерівність Харнаку для виродженого параболічного рівняння р-Лапласу.	5
2	Нерівність Харнаку для сингулярного параболічного рівняння р-Лапласу. Еліптична форма нерівності Харнаку.	5
3	Нерівність Харнаку для рівняння пористого середовища, випадки $m > 1$ та $m < 1$.	5
4	Нерівність Харнаку для критичних та субкритичних сингулярних рівнянь.	5
5	$L_{loc}^r - L_{loc}^\infty$ форма нерівності Харнаку.	5
6	Назад у часі L_{loc}^r оцінки для розв’язків критичних та субкритичних сингулярних рівнянь.	5
7	Наслідки нерівності Харнаку: локальна Гельдеровість, теорема Ліувілля, слабка форма нерівності Харнаку, ніжні оцінки розв’язків типу Баренблатту.	5
	Разом	64

7. Методи навчання

При викладанні навчальної дисципліни «Нерівність Харнака для вироджених та сингулярних параболічних рівнянь» використовуються такі методи навчання: проблемно-пошуковий, пояснювально-ілюстративний, індуктивний і дедуктивний.

8. Методи контролю

Використовуються наступні методи контролю:

1. Поточний контроль знань:
 - усне опитування;
 - виконання практичних робіт;
 - виконання дослідницьких завдань.
2. Підсумковий контроль знань (іспит):
 - у письмовій формі.

9. Критерії оцінювання результатів навчання

Розподіл балів, які отримує аспірант

Аудиторна робота														Самостійна робота	Підсумковий контроль (іспит)	Загальна кількість отриманих балів
Змістовий модуль 1				Змістовий модуль 2			Змістовий модуль 3									
Теми																
T1	T2	T3	T4	T1	T2	T3	T1	T2	T3	T4	T1	T2	T3			
1	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	10	40	100

Шкала оцінювання

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка за національною шкалою
	для іспиту
90-100	«відмінно» - здобувач повно і всебічно розкриває питання теми, вільно оперує поняттями і термінологією, демонструє глибокі знання джерел, має власну точку зору стосовно відповідної теми і може аргументовано її доводити
75-89	«добре» - загалом рівень знань здобувачів відповідає викладеному вище, але мають місце деякі упущення при виконанні завдань, обґрунтування неточні, не підтверджуються достатньо обґрунтованими доказами
60-74	«задовільно» - здобувач розкрив питання, в загальних рисах, розуміє їх суть, намагається робити висновки, але при цьому припускається грубих помилок, матеріал викладає нелогічно і не самостійно

34-59	«незадовільно» - з можливістю повторного складання, здобувач не в змозі дати відповідь на поставлене запитання або відповідь неправильна, не розуміє суті питання, не може зробити висновки
0-35	«незадовільно» - з обов'язковим повторним вивченням дисципліни

10. Орієнтовний перелік питань до підсумкового контролю (іспит)

1. Класична нерівність Харнака.
2. Вироджені та сингулярні параболічні рівняння.
3. Параболічне рівняння р-Лапласу.
4. Рівняння пористого середовища, випадки $m > 1$ та $m < 1$.
5. Нерівності Пуанкаре та Соболева.
6. Лема про швидку геометричну збіжність.
7. Інтерполяційна лема.
8. Локальні енергетичні оцінки $(u - k)_\pm$.
9. Лема типу Де Джорджі для параболічного рівняння р-Лапласу.
10. Варіант леми типу Де Джорджі, що включає “початкові” дані.
11. Лема типу Де Джорджі для рівняння пористого середовища, випадки $m > 1$ та $m < 1$.
12. Поширення позитивності для виродженого параболічного рівняння р-Лапласу.
13. Поширення позитивності для сингулярного параболічного рівняння р-Лапласу.
14. Поширення позитивності для рівняння пористого середовища, випадки $m > 1$ та $m < 1$.
15. Нерівність Харнаку для виродженого параболічного рівняння р-Лапласу.
16. Нерівність Харнаку для сингулярного параболічного рівняння р-Лапласу.
Еліптична форма нерівності Харнаку.
17. Нерівність Харнаку для рівняння пористого середовища, випадки $m > 1$ та $m < 1$.
18. Нерівність Харнаку для критичних та субкритичних сингулярних рівнянь.
19. $L_{loc}^r - L_{loc}^\infty$ форма нерівності Харнаку.
20. Назад у часі L_{loc}^r оцінки для розв'язків критичних та субкритичних сингулярних рівнянь.
21. Наслідки нерівності Харнаку: локальна Гельдеровість, теорема Ліувілля, слабка форма нерівності Харнаку, ніжні оцінки розв'язків типу Баренблатту.

11. Рекомендована література

Основна література дисципліни

1. E. DiBenedetto, U. Gianazza and V. Vespri, Harnack's Inequality for Degenerate and Singular Parabolic Equations, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2012. doi: 10.1007/978-1-4614-1584-8
2. E. DiBenedetto, Degenerate Parabolic Equations, Universitext, Springer-Verlag, New York, 1993.
3. M. Bonforte and J.L. Vázquez, Positivity, Local Smoothing and Harnack Inequalities for Very Fast Diffusion Equations, *Adv. Math.*, **223**, (2010), 529–578.
4. M. Bonforte, R.G. Iagar and J.L. Vázquez, Local smoothing effects, positivity, and Harnack inequalities for the fast p -Laplacian equation, *Adv. Math.*, **224**, (2010), 2151–2215.
5. E. DiBenedetto, U. Gianazza and V. Vespri, Forward, Backward and Elliptic Harnack Inequalities for Non-Negative Solutions to Certain Singular Parabolic Partial Differential Equations, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (5)*, **IX**, (2010), 385–422.
6. E. DiBenedetto, U. Gianazza and V. Vespri, Alternative Forms of the Harnack Inequality for Non-Negative Solutions to Certain Degenerate and Singular Parabolic Equations, *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.*, **20**, (2009), 369–377.
7. U. Gianazza and S. Polidoro, Lower bounds for solutions of degenerate parabolic equations, Subelliptic PDE's and applications to geometry and finance, *Lect. Notes Semin. Interdiscip. Mat.*, **6**, (2007), 157–162.
8. U. Gianazza, M. Surnachev and V. Vespri, On a new proof of Hölder continuity of solutions of p -Laplace type parabolic equations, *Adv. Calc. Var.*, **3**, (2010), no. 3, 263–278.
9. E. DiBenedetto, U. Gianazza and V. Vespri, Harnack Estimates for Quasi-Linear Degenerate Parabolic Differential Equation, *Acta Math.*, **200**, (2008), 181–209.

Допоміжна література дисципліни

1. E. DiBenedetto, Intrinsic Harnack type inequalities for solutions of certain degenerate parabolic equations, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **100**(2), (1988), 129–147.
2. E. DiBenedetto, Harnack Estimates in Certain Function Classes, *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena*, **37**, (1989), 173–182.
3. D. Gilbarg and N.S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, 2nd ed., Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No. 224, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
4. E. DiBenedetto, Continuity of Weak Solutions to a General Porous Medium Equation, *Indiana Univ. Math. J.*, **32**(1), (1983), 83–118.
5. J. Moser, On Harnack's theorem for elliptic differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **14**, (1961), 577–591.