

**НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ**

«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Директор ІПММ НАН України
академік НАН України



Ігор СКРИПНІК
« 25 » вересня 2025 р.

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

**Деякі питання якісної теорії еліптичних рівнянь
другого порядку**

**підготовки здобувачів ступеня вищої освіти
третьої (освітньо-науковий)
доктора філософії**

галузь знань 11 Математика та статистика

спеціальність 111 Математика

Черкаси – 2025 р.

Робоча навчальна програма навчальної дисципліни «Деякі питання якісної теорії еліптичних рівнянь другого порядку» для здобувачів наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 Математика

Розробник:

Скрипнік Ігор Ігорович, директор, завідувач відділу нелінійного аналізу та рівнянь математичної фізики Інституту прикладної математики і механіки НАН України, доктор фізико-математичних наук, доцент, академік НАН України

Робочу програму схвалено на засіданні відділу нелінійного аналізу та рівнянь математичної фізики

Протокол № 2 від 18.09. 2025 року.

Завідувач відділу



І.І. Скрипнік

Схвалено Науково-методичною радою Інституту прикладної математики і механіки НАН України

Протокол № 4 від 22 вересня 2025 року.

Голова науково-методичної ради



Несмєлова О.В.

1. Опис навчальної дисципліни

Найменування показників	Галузь знань, напрям підготовки, освітньо-кваліфікаційний рівень	Характеристика навчальної дисципліни	
Кількість кредитів - 4	Галузь знань: 11 Математика та статистика	Вибіркова	
Загальна кількість годин – 120	Спеціальність: 111 Математика	Рік підготовки:	
		1-й, 2-й	
		Семестр	
		2-й	3-й
		Лекції	
Тижневих годин: аудиторних – 1,5 самостійної роботи – 1,7	Освітньо-кваліфікаційний рівень: доктор філософії	14	14
		Практичні	
		14	14
		Самостійна робота	
		32	32
		Вид контролю: іспит	

2. Мета, завдання та очікувані результати навчальної дисципліни.

Метою вивчення навчальної дисципліни «Деякі питання якісної теорії еліптичних рівнянь другого порядку» є формування теоретичних знань з якісної теорії еліптичних рівнянь другого порядку, оволодіння основними методами дослідження розв'язків таких рівнянь.

Основними завданнями вивчення дисципліни «Деякі питання якісної теорії еліптичних рівнянь другого порядку» є:

- опанувати основні поняття та теореми теорії лінійних еліптичних рівнянь другого порядку;
- оволодіти основними методами дослідження розв'язків лінійних еліптичних рівнянь другого порядку.

Очікувані результати навчальної дисципліни

Загальні компетентності:

1. Аналіз і синтез. Здатність до аналізу та синтезу на основі логічних аргументів та перевірених фактів; навички управління інформацією (уміння знаходити та аналізувати інформацію з різних джерел) **(ЗК 1)**.
2. Дослідницька здатність. Компетентності ініціювати та виконувати (індивідуально або в науковій групі) наукові дослідження, що приводять

до отримання нових знань; здатність застосовувати знання на практиці **(ЗК 2)**.

3. Гнучкість мислення. Набуття гнучкого способу мислення, який дає можливість зрозуміти й розв'язати проблеми та задачі, зберігаючи при цьому критичне відношення до усталених наукових концепцій **(ЗК 3)**.
4. Комунікативні навички. Здатність ефективно спілкуватися із спеціальною та загальною аудиторіями, а також представляти складну інформацію у зручний та зрозумілий спосіб усно і письмово, використовуючи відповідну технічну лексику та методи; навички використання інформаційних і комунікаційних технологій; здатність спілкуватися рідною та другою іноземною мовою як усно, так і письмово **(ЗК 6)**.
5. Міжнародний кругозір. Здатність працювати в міжнародному середовищі, ставитися із повагою до національних та культурних традицій, способів роботи інших членів групи **(ЗК 7)**.
6. Популяризаційні навички. Вміння спілкуватися із нефаківцями; здатність провести усну презентацію та написати зрозумілу статтю за результатами проведених досліджень, а також щодо сучасних концепцій у математиці для нефаківців у цій галузі; здатність спілкуватися з експертами з інших галузей **(ЗК 8)**.
7. Етичні установки. Етика поведінки в наукових дослідженнях; турбота про якість результату **(ЗК 11)**.
8. Особисті якості. Здатність до навчання, саморозвитку та самовдосконалення протягом життя; визначеність і наполегливість щодо поставлених завдань і взятих обов'язків **(ЗК 12)**.

Фахові компетентності (згідно до переліку фахових компетентностей освітньої програми):

1. Здатність застосовувати сучасну методологію, загальні та спеціальні методи наукового дослідження за спеціальністю та обраною спеціалізацією **(ФК 2)**.
2. Здатність логічно мислити, формулювати, строго доводити та перевіряти правильність математичних тверджень **(ФК 4)**.
3. Оволодіння основними поняттями, підходами та принципами сучасних розділів функціонального аналізу, рівнянь математичної фізики та теорії диференціальних рівнянь, застосування абстрактних методів при розв'язанні задач **(ФК 12)**.
4. Оволодіння спеціальними розділами та методами досліджень теорії функціонального аналізу та теорії диференціальних рівнянь, набуття умінь ефективно застосовувати їх для аналізу складних систем та явищ **(ФК 14)**.

Програмні результати навчання (згідно до переліку програмних результатів навчання освітньої програми):

1. Знати та розуміти традиційні та передові тенденції в галузі математики, етапи історичного розвитку математичних знань і парадигм, формування поглибленої системи наукових знань за напрямом досліджень **(ПРН1)**.
2. Знати основні принципи, форми та методи проведення наукових досліджень в галузі математики, володіти математичним апаратом в об'ємі, достатньому для професійної діяльності **(ПРН3)**.
3. Вміти за допомогою теоретичного математичного апарату досліджувати різноманітні природні явища та процеси, проводити аналіз впливу на них різних факторів, а також вивчати взаємодію між явищами з метою отримання переконливо доведених і корисних фундаментальних та практичних результатів **(ПРН5)**.
4. Здійснювати професійну письмову й усну комунікацію українською та іноземними мовами. Уміти працювати зі спеціальною літературою та наукометричними базами даних, в тому числі іноземною мовою **(ПРН8)**.
5. Вміти організувати неперервний власний саморозвиток і самовдосконалення, набуття гнучкого способу мислення при творчому дослідженні, в тому числі прикладних математичних проблем **(ПРН10)**.
6. Вміти формулювати наукові проблеми з огляду на цінні стін орієнтири сучасного суспільства та стану її поточного дослідження **(ПРН-11)**.
7. Розв'язувати фундаментальні та прикладні задачі придатними математичними методами, перевіряти умови виконання математичних тверджень, коректно переносити умови та твердження на нові класи об'єктів, знаходити й аналізувати відповідності між поставленою задачею й відомими моделями, будувати та досліджувати нові математичні моделі **(ПРН-12)**.
8. Знати теоретичні основи і застосовувати методи сучасної теорії диференціальних рівнянь та теорії нелінійних коливань для розв'язування фундаментальних та прикладних задач **(ПРН-16)**.
9. Знати теоретичні основи і застосовувати сучасні методи математичної фізики для моделювання реальних фізичних, біологічних, екологічних, соціально-економічних та інших процесів і явищ **(ПРН-19)**.

За результатами вивчення навчальної дисципліни здобувач доктора філософії повинен:

знати:

- основні поняття і теореми курсу;
- методи дослідження розв'язків лінійних еліптичних рівнянь другого порядку;

уміти :

- розв'язувати стандартні задачі, доводити основні теореми курсу;

- використовувати отримані теоретичні знання в самостійних дослідженнях.

3. Програма навчальної дисципліни

Змістовий модуль 1. Властивості знакосталих розв'язків

Тема 1. Умови, що накладаються на коефіцієнти рівняння. Деякі позначення.

Тема 2. Продовження квадратичної форми з області на весь простір.

Тема 3. Основна лема.

Тема 4. Характер зростання розв'язків в обмеженій області.

Тема 5. Теорема типу Фрагмена-Лінделефа.

Тема 6. Зростання та спадання розв'язків на нескінченності та в околі граничної точки.

Тема 7. Основна лема для самоспряженого рівняння.

Тема 8. Одна теорема аналізу.

Тема 9. Теореми про зростання та спадання додатніх розв'язків самоспряженого рівняння.

Змістовий модуль 2. Властивості знакозмінних розв'язків

Тема 1. Теорема єдиності.

Тема 2. Теорема про три кулі.

Тема 3. Про допустиму швидкість спадання розв'язків в напівциліндрі.

Тема 4. Залежність між числом змін знака розв'язку та його ростом.

4. Структура навчальної дисципліни

Назва теми	Кількість годин			
	Усього	у тому числі		
		Лекції	Практичні заняття	Самостійна робота
1	2	3	4	5
Змістовий модуль 1. Властивості знакосталих розв'язків				
Тема 1. Умови, що накладаються	8	2	2	4

на коефіцієнти рівняння. Деякі позначення.				
Тема 2. Продовження квадратичної форми з області на весь простір.	9	2	2	5
Тема 3. Основна лема.	9	2	2	5
Тема 4. Характер зростання розв'язків в обмеженій області.	9	2	2	5
Тема 5. Теорема типу Фрагмена-Лінделефа.	9	2	2	5
Тема 6. Зростання та спадання розв'язків на нескінченності та в околі граничної точки.	9	2	2	5
Тема 7. Основна лема для самоспряженого рівняння.	9	2	2	5
Тема 8. Одна теорема аналізу.	9	2	2	5
Тема 9. Теорема про зростання та спадання додатніх розв'язків самоспряженого рівняння.	13	4	4	5
Змістовий модуль 2. Властивості знакозмінних розв'язків				
Тема 1. Теорема єдиності.	9	2	2	5
Тема 2. Теорема про три кулі.	9	2	2	5
Тема 3. Про допустиму швидкість спадання розв'язків в напівциліндрі.	9	2	2	5
Тема 4. Залежність між числом змін знака розв'язку та його ростом.	9	2	2	5
Усього годин	120	28	28	64

5. Теми практичних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
Змістовий модуль 1. Властивості знакосталих розв'язків		
1	Умови, що накладаються на коефіцієнти рівняння. Деякі позначення.	2
2	Продовження квадратичної форми з області на весь простір.	2
3	Основна лема.	2

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
4	Характер зростання розв'язків в обмеженій області.	2
5	Теорема типу Фрагмена-Лінделефа.	2
6	Зростання та спадання розв'язків на нескінченності та в околі граничної точки.	2
7	Основна лема для самоспряженого рівняння.	2
8	Одна теорема аналізу.	2
9	Теореми про зростання та спадання додатніх розв'язків самоспряженого рівняння.	4
Змістовий модуль 3. Властивості знакозмінних розв'язків		
1	Теорема єдиності.	2
2	Теорема про три кулі.	2
3	Про допустиму швидкість спадання розв'язків в напівциліндрі.	2
4	Залежність між числом змін знака розв'язку та його ростом.	2
	Разом	28

6. Теми для самостійної роботи

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
Змістовий модуль 1. Властивості знакосталих розв'язків		
1	Умови, що накладаються на коефіцієнти рівняння. Деякі позначення.	4
2	Продовження квадратичної форми з області на весь простір.	5
3	Основна лема.	5
4	Характер зростання розв'язків в обмеженій області.	5
5	Теорема типу Фрагмена-Лінделефа.	5
6	Зростання та спадання розв'язків на нескінченності та в околі граничної точки.	5
7	Основна лема для самоспряженого рівняння.	5
8	Одна теорема аналізу.	5
9	Теореми про зростання та спадання додатніх розв'язків самоспряженого рівняння.	5
Змістовий модуль 3. Властивості знакозмінних розв'язків		

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Теорема єдиності.	5
2	Теорема про три кулі.	5
3	Про допустиму швидкість спадання розв'язків в напівциліндрі.	5
4	Залежність між числом змін знака розв'язку та його ростом.	5
	Разом	64

7. Методи навчання

При викладанні навчальної дисципліни «Деякі питання якісної теорії еліптичних рівнянь другого порядку» використовуються такі методи навчання: проблемно-пошуковий, пояснювально-ілюстративний, індуктивний і дедуктивний.

8. Методи контролю

Використовуються наступні методи контролю:

- Поточний контроль знань:
 - усне опитування;
 - виконання практичних робіт;
 - виконання дослідницьких завдань.
- Підсумковий контроль знань (іспит):
 - у письмовій формі.

9. Критерії оцінювання результатів навчання

Розподіл балів, які отримує аспірант

Аудиторна робота													Самостійна робота	Підсумковий контроль (іспит)	Загальна кількість отриманих балів
Змістовий модуль 1									Змістовий модуль 2						
Теми															
Т1	Т2	Т3	Т4	Т5	Т6	Т7	Т8	Т9	Т1	Т2	Т3	Т4			
3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	10	40	100

Шкала оцінювання

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка за національною шкалою
	для іспиту
90-100	«відмінно» - здобувач повно і всебічно розкриває питання теми, вільно оперує поняттями і термінологією, демонструє глибокі знання джерел, має власну точку зору стосовно відповідної теми і може аргументовано її доводити
75-89	«добре» - загалом рівень знань здобувачів відповідає викладеному вище, але мають місце деякі упущення при виконанні завдань, обґрунтування неточні, не підтверджуються достатньо обґрунтованими доказами
60-74	«задовільно» - здобувач розкрив питання, в загальних рисах, розуміє їх суть, намагається робити висновки, але при цьому припускається грубих помилок, матеріал викладає нелогічно і не самостійно
35-59	«незадовільно» - з можливістю повторного складання, здобувач не в змозі дати відповідь на поставлене запитання або відповідь неправильна, не розуміє суті питання, не може зробити висновки
0-34	«незадовільно» - з обов'язковим повторним вивченням дисципліни

10. Орієнтовний перелік питань до підсумкового контролю (іспит)

1. Лінійні еліптичні рівняння другого порядку. Умови, що накладаються на коефіцієнти рівняння.
2. Самоспряжене рівняння.
3. Умова Діні.
4. Теорема Ліувілля.
5. Продовження квадратичної форми з області на весь простір.
6. Основна лема.
7. Характер зростання розв'язків в обмеженій області.
8. Теорема типу Фрагмена-Лінделефа.
9. Зростання та спадання розв'язків на нескінченності та в околі граничної точки.
10. Основна лема для самоспряженого рівняння.
11. Одна теорема аналізу.
12. Теореми про зростання та спадання додатніх розв'язків самоспряженого рівняння.
13. Теорема єдиності.

14. Теорема про три кулі.
15. Про допустиму швидкість спадання розв'язків в напівциліндрі.
16. Залежність між числом змін знака розв'язку та його ростом.
17. Властивості розв'язків сталого знаку.
18. Властивості знакозмінних розв'язків.

11. Рекомендована література

Основна література дисципліни

1. E.M. Landis, Second Order Equations of Elliptic and Parabolic Type, Transl. Math. Monographs, #171, AMS, Providence, RI, 1997.
2. J. Serrin, On the Harnack inequality for linear elliptic equations, Journ. d'Analyse Math. 4, № 2 (1955—1956), 292—308.
3. H. Gilbarg, J. Serrin, On isolated singularities of second order elliptic differential equations, Journ. d'Analyse Math. 4, № 2 (1955 — 1956).
4. J. Moser, A new proof of the Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic equations, Comm. Pur. Appl. Math. 13, № 3 (1960), 457—468.
5. S.N. Bernstein, Collected works. III Differential equations, calculus of variations and geometry (1903–1947), Izd. Akad. Nauk SSSR.
6. A. Douglis, Uniqueness in Cauchy problems for elliptic systems of equations, Comm. Pur. Appl. Math. 6 (1953), 291—298.
7. P. Hartman, A. Wintner, On the local behavior of solutions of non-parabolic partial differential equations, Amer. Journ. Math. 75 (1953), 449—476.

Допоміжна література дисципліни

1. J. Nash, Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations, Amer. Journ. Math. 80, № 4 (1958), 931—954.
2. J. Moser, On Harnack's theorem for elliptic differential equations, Comm. Pur. Appl. Math. 14, № 3 (1961), 577—591.