

**НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ**

«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Директор ІПММ НАН України
академік НАН України

Ігор СКРИПНІК

« 25 » вересня 2025 р.



РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

**Елементи функціонального аналізу та їх застосування до
загальної теорії еліптичних граничних задач**

**підготовки здобувачів ступеня вищої освіти
треть (освітньо-науковий)
доктора філософії**

галузь знань 11 Математика та статистика

спеціальність 111 Математика

Черкаси – 2025 р.

Робоча навчальна програма навчальної дисципліни «Елементи функціонального аналізу та їх застосування до загальної теорії еліптичних граничних задач» для здобувачів наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 Математика

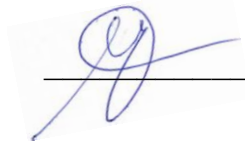
Розробник:

Скрипнік Ігор Ігорович, директор, завідувач відділу нелінійного аналізу та рівнянь математичної фізики Інституту прикладної математики і механіки НАН України, доктор фізико-математичних наук, доцент, академік НАН України

Робочу програму схвалено на засіданні відділу нелінійного аналізу та рівнянь математичної фізики

Протокол № 2 від 18.09.2025 року.

Завідувач відділу



І.І. Скрипнік

Схвалено Науково-методичною радою Інституту прикладної математики і механіки НАН України

Протокол № 4 від 22 вересня 2025 року.

Голова науково-методичної ради



О.В. Несмелова

1. Опис навчальної дисципліни

Найменування показників	Галузь знань, напрям підготовки, освітньо-кваліфікаційний рівень	Характеристика навчальної дисципліни	
Кількість кредитів - 4	Галузь знань: 11 Математика та статистика	Вибіркова	
Загальна кількість годин – 120	Спеціальність: 111 Математика	Рік підготовки:	
		1-й, 2-й	
		Семестр	
		2-й	3-й
		Лекції	
Тижневих годин: аудиторних – 1,5; самостійної роботи – 1,7	Освітньо-кваліфікаційний рівень: доктор філософії	14	14
		Практичні	
		14	14
		Самостійна робота	
		32	32
		Вид контролю: іспит	

2. Мета, завдання та очікувані результати навчальної дисципліни.

Метою навчальної дисципліни «Елементи функціонального аналізу та їх застосування до загальної теорії еліптичних граничних задач» є знайомство з основними положеннями теорії граничних задач; вивчення основних методів дослідження розв'язності еліптичних граничних задач.

Завдання навчальної дисципліни:

- опанувати основні поняття та теореми теорії еліптичних граничних задач;
- оволодіти основними принципами і апаратом функціонального аналізу для дослідження розв'язності еліптичних граничних задач;
- розв'язувати основні типи задач, передбачені програмою.

Очікувані результати навчальної дисципліни

Загальні компетентності:

1. Аналіз і синтез. Здатність до аналізу та синтезу на основі логічних аргументів та перевірених фактів; навички управління інформацією (уміння знаходити та аналізувати інформацію з різних джерел) (ЗК 1).
2. Дослідницька здатність. Компетентності ініціювати та виконувати (індивідуально або в науковій групі) наукові дослідження, що приводять

до отримання нових знань; здатність застосовувати знання на практиці (ЗК 2).

3. Гнучкість мислення. Набуття гнучкого способу мислення, який дає можливість зрозуміти й розв'язати проблеми та задачі, зберігаючи при цьому критичне відношення до усталених наукових концепцій (ЗК 3).
4. Комунікативні навички. Здатність ефективно спілкуватися із спеціальною та загальною аудиторіями, а також представляти складну інформацію у зручний та зрозумілий спосіб усно і письмово, використовуючи відповідну технічну лексику та методи; навички використання інформаційних і комунікаційних технологій; здатність спілкуватися рідною та другою іноземною мовою як усно, так і письмово (ЗК 6).
5. Міжнародний кругозір. Здатність працювати в міжнародному середовищі, ставитися із повагою до національних та культурних традицій, способів роботи інших членів групи (ЗК 7).
6. Популяризаційні навички. Вміння спілкуватися із нефаківцями; здатність провести усну презентацію та написати зрозумілу статтю за результатами проведених досліджень, а також щодо сучасних концепцій у математиці для нефаківців у цій галузі; здатність спілкуватися з експертами з інших галузей (ЗК 8).
7. Етичні установки. Етика поведінки в наукових дослідженнях; турбота про якість результату (ЗК 11).
8. Особисті якості. Здатність до навчання, саморозвитку та самовдосконалення протягом життя; визначеність і наполегливість щодо поставлених завдань і взятих обов'язків (ЗК 12).

Фахові компетентності (згідно до переліку фахових компетентностей освітньої програми):

1. Здатність застосовувати сучасну методологію, загальні та спеціальні методи наукового дослідження за спеціальністю та обраною спеціалізацією (ФК 2).
2. Здатність логічно мислити, формулювати, строго доводити та перевіряти правильність математичних тверджень (ФК 4).
3. Оволодіння основними поняттями, підходами та принципами сучасних розділів функціонального аналізу, рівнянь математичної фізики та теорії диференціальних рівнянь, застосування абстрактних методів при розв'язанні задач (ФК 12).
4. Оволодіння сучасними методами теорії граничних задач, теорії узагальнених функцій, теорії операторів (ФК 13).
5. Оволодіння спеціальними розділами та методами досліджень теорії функціонального аналізу та теорії диференціальних рівнянь, набуття умінь ефективно застосовувати їх для аналізу складних систем та явищ (ФК 14).

Програмні результати навчання (згідно до переліку програмних результатів навчання освітньої програми):

1. Знати та розуміти традиційні та передові тенденції в галузі математики, етапи історичного розвитку математичних знань і парадигм, формування поглибленої системи наукових знань за напрямом досліджень (ПРН-1).
2. Знати основні принципи, форми та методи проведення наукових досліджень в галузі математики, володіти математичним апаратом в об'ємі, достатньому для професійної діяльності (ПРН-3).
3. Вміти за допомогою теоретичного математичного апарату досліджувати різноманітні природні явища та процеси, проводити аналіз впливу на них різних факторів, а також вивчати взаємодію між явищами з метою отримання переконливо доведених і корисних фундаментальних та практичних результатів (ПРН-5).
4. Здійснювати професійну письмову й усну комунікацію українською та іноземними мовами. Уміти працювати зі спеціальною літературою та наукометричними базами даних, в тому числі іноземною мовою (ПРН-8).
5. Вміти організувати неперервний власний саморозвиток і самовдосконалення, набуття гнучкого способу мислення при творчому дослідженні, в тому числі прикладних математичних проблем (ПРН-10).
6. Вміти формулювати наукові проблеми з огляду на цінні стін орієнтири сучасного суспільства та стану її поточного дослідження (ПРН-11).
7. Розв'язувати фундаментальні та прикладні задачі придатними математичними методами, перевіряти умови виконання математичних тверджень, коректно переносити умови та твердження на нові класи об'єктів, знаходити й аналізувати відповідності між поставленою задачею й відомими моделями, будувати та досліджувати нові математичні моделі (ПРН-12).
8. Знати теоретичні основи і застосовувати методи сучасної наукової теорії функціонального аналізу, основні властивості диференціальних операторів, узагальнених функцій і вміння ефективно застосовувати їх для синтезу і аналізу складних систем та явищ (ПРН-17).
9. Знати теоретичні основи і застосовувати сучасні методи математичної фізики для моделювання реальних фізичних, біологічних, екологічних, соціально-економічних та інших процесів і явищ (ПРН-19).

За результатами вивчення навчальної дисципліни здобувач доктора філософії повинен:

знати:

- постановки еліптичних граничних задач;
- основні поняття та теореми теорії еліптичних граничних задач;
- методи дослідження розв'язності еліптичних граничних задач;

уміти :

- розв'язувати стандартні задачі, доводити основні теореми курсу;
- використовувати отримані теоретичні знання в самостійних дослідженнях.

3. Програма навчальної дисципліни**Змістовий модуль 1. Елементи функціонального аналізу**

Тема 1. Нормовані простори і простори Гільберта.

Тема 2. Загальні відомості про лінійні функціонали і лінійні обмежені оператори в Гільбертових просторах. Необмежені оператори.

Тема 3. Узагальнені похідні і усереднення.

Тема 4. Визначення просторів $W_m^l(\Omega)$ і $\overset{o}{W}_m^l(\Omega)$.

Тема 5. Простори $W_2^1(\Omega)$ і $\overset{o}{W}_2^1(\Omega)$ і їх основні властивості.

Тема 6. Мультиплікативні нерівності для елементів про-

просторів $W_m^l(\Omega)$ і $\overset{o}{W}_m^l(\Omega)$.

Тема 7. Теореми вкладення для просторів $W_m^l(\Omega)$ і $\overset{o}{W}_m^l(\Omega)$.

Змістовий модуль 2. Крайові задачі для рівнянь еліптичного типу

Тема 1. Постановка крайових задач.

Тема 2. Узагальнені розв'язки з $W_2^1(\Omega)$. Перша енергетична нерівність.

Тема 3. Дослідження розв'язності задачі Діріхле в просторі $W_2^1(\Omega)$ (три теореми Фредгольма).

Тема 4. Теореми розвинення за власними функціями симетричних операторів.

Тема 5. Друга і третя крайові задачі.

Тема 6. Друга основна нерівність для еліптичних операторів.

Тема 7. Розв'язність задачі Діріхле в просторі $W_2^2(\Omega)$.

4. Структура навчальної дисципліни

Назва теми	Кількість годин			
	Усього	у тому числі		
		Лекції	Практичні заняття	Самостійна робота
1	2	3	4	5
Змістовий модуль 1. Елементи функціонального аналізу				
Тема 1. Нормовані простори і простори Гільберта.	8	2	2	4
Тема 2. Загальні відомості про лінійні функціонали і лінійні обмежені оператори в Гільбертових просторах. Необмежені оператори.	8	2	2	4
Тема 3. Узагальнені похідні і усереднення.	8	2	2	4
Тема 4. Визначення просторів $W_m^l(\Omega)$ і $W_m^l(\Omega)$.	8	2	2	4
Тема 5. Простори $W_2^1(\Omega)$ і $W_2^1(\Omega)$ і їх основні властивості.	8	2	2	4
Тема 6. Мультиплікативні нерівності для елементів просторів $W_m^l(\Omega)$ і $W_m^l(\Omega)$.	10	2	2	6
Тема 7. Теореми вкладення для просторів $W_m^l(\Omega)$ і $W_m^l(\Omega)$.	10	2	2	6
Змістовий модуль 2. Крайові задачі для рівнянь еліптичного типу				
Тема 1. Нормовані простори і простори Гільберта.	8	2	2	4

Тема 2. Загальні відомості про лінійні функціонали і лінійні обмежені оператори в Гільбертових просторах. Необмежені оператори.	8	2	2	4
Тема 3. Узагальнені похідні і усереднення.	10	2	2	6
Тема 4. Визначення просторів $W_m^l(\Omega)$ і $W_m^o(\Omega)$.	8	2	2	4
Тема 5. Простори $W_2^1(\Omega)$ і $W_2^o(\Omega)$ і їх основні властивості.	8	2	2	4
Тема 6. Мультиплікативні нерівності для елементів просторів $W_m^l(\Omega)$ і $W_m^o(\Omega)$.	8	2	2	4
Тема 7. Теореми вкладення для просторів $W_m^l(\Omega)$ і $W_m^o(\Omega)$.	10	2	2	6
Усього годин	120	28	28	64

5. Теми практичних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
Змістовий модуль 1. Елементи функціонального аналізу		
1	Нормовані простори і простори Гільберта.	2
2	Загальні відомості про лінійні функціонали і лінійні обмежені оператори в Гільбертових просторах. Необмежені оператори.	2
3	Узагальнені похідні і усереднення.	2
4	Визначення просторів $W_m^l(\Omega)$ і $W_m^o(\Omega)$.	2
5	Простори $W_2^1(\Omega)$ і $W_2^o(\Omega)$ і їх основні властивості.	2
6	Мультиплікативні нерівності для елементів просторів $W_m^l(\Omega)$ і $W_m^o(\Omega)$.	2

7	Теореми вкладення для просторів $W_m^l(\Omega)$ і $\overset{o^l}{W}_m(\Omega)$.	2
Змістовий модуль 2. Крайові задачі для рівнянь еліптичного типу		
1	Нормовані простори і простори Гільберта.	2
2	Загальні відомості про лінійні функціонали і лінійні обмежені оператори в Гільбертових просторах. Необмежені оператори.	2
3	Узагальнені похідні і усереднення.	2
4	Визначення просторів $W_m^l(\Omega)$ і $\overset{o^l}{W}_m(\Omega)$.	2
5	Простори $W_2^1(\Omega)$ і $\overset{o^1}{W}_2(\Omega)$ і їх основні властивості.	2
6	Мультиплікативні нерівності для елементів просторів $W_m^l(\Omega)$ і $\overset{o^l}{W}_m(\Omega)$.	2
7	Теореми вкладення для просторів $W_m^l(\Omega)$ і $\overset{o^l}{W}_m(\Omega)$.	2
Разом		28

6. Теми для самостійної роботи

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
Змістовий модуль 1. Елементи функціонального аналізу		
1	Нормовані простори і простори Гільберта.	4
2	Загальні відомості про лінійні функціонали і лінійні обмежені оператори в Гільбертових просторах. Необмежені оператори.	4
3	Узагальнені похідні і усереднення.	4
4	Визначення просторів $W_m^l(\Omega)$ і $\overset{o^l}{W}_m(\Omega)$.	4
5	Простори $W_2^1(\Omega)$ і $\overset{o^1}{W}_2(\Omega)$ і їх основні властивості.	4
6	Мультиплікативні нерівності для елементів просторів $W_m^l(\Omega)$ і $\overset{o^l}{W}_m(\Omega)$.	6
7	Теореми вкладення для просторів $W_m^l(\Omega)$ і $\overset{o^l}{W}_m(\Omega)$.	6

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
Змістовий модуль 2. Крайові задачі для рівнянь еліптичного типу		
1	Нормовані простори і простори Гільберта.	4
2	Загальні відомості про лінійні функціонали і лінійні обмежені оператори в Гільбертових просторах. Необмежені оператори.	4
3	Узагальнені похідні і усереднення.	6
4	Визначення просторів $W_m^l(\Omega)$ і $W_m^{o^l}(\Omega)$.	4
5	Простори $W_2^1(\Omega)$ і $W_2^{o^1}(\Omega)$ і їх основні властивості.	4
6	Мультиплікативні нерівності для елементів просторів $W_m^l(\Omega)$ і $W_m^{o^l}(\Omega)$.	4
7	Теореми вкладення для просторів $W_m^l(\Omega)$ і $W_m^{o^l}(\Omega)$.	6
	Разом	64

7. Методи навчання

При викладанні навчальної дисципліни «Елементи функціонального аналізу та їх застосування до загальної теорії еліптичних граничних задач» використовуються такі методи навчання: проблемно-пошуковий, пояснювально-ілюстративний, індуктивний і дедуктивний.

8. Методи контролю

Використовуються наступні методи контролю:

- Поточний контроль знань:
 - усне опитування;
 - виконання практичних робіт;
 - тестування;
 - виконання дослідницьких завдань.
- Підсумковий контроль знань (іспит):
 - у письмовій формі.

9. Критерії оцінювання результатів навчання

Розподіл балів, які отримує аспірант

Аудиторна робота														Самостійна робота	Підсумковий контроль (залік)	Загальна кількість отриманих балів
Змістовий модуль 1 (28 б)							Змістовий модуль 2 (22 б)									
теми																
T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7			
4	4	4	4	4	4	4	4	3	3	3	3	3	3	10	40	100

Шкала оцінювання

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка за національною шкалою
	для іспиту
90-100	«відмінно» - здобувач повно і всебічно розкриває питання теми, вільно оперує поняттями і термінологією, демонструє глибокі знання джерел, має власну точку зору стосовно відповідної теми і може аргументовано її доводити
75-89	«добре» - загалом рівень знань здобувачів відповідає викладеному вище, але мають місце деякі упущення при виконанні завдань, обґрунтування неточні, не підтверджуються достатньо обґрунтованими доказами
60-74	«задовільно» - здобувач розкрив питання, в загальних рисах, розуміє їх суть, намагається робити висновки, але при цьому припускається грубих помилок, матеріал викладає нелогічно і не самостійно
35-59	«незадовільно» - з можливістю повторного складання, здобувач не в змозі дати відповідь на поставлене запитання або відповідь неправильна, не розуміє суті питання, не може зробити висновки
0-34	«незадовільно» - з обов'язковим повторним вивченням дисципліни

10. Орієнтовний перелік питань до підсумкового контролю (іспит)

1. Лінійний нормований простір. Банахові, Гільбертові простори. Допоміжні нерівності.
2. Лінійні неперервні функціонали. Норма функціонала. Теорема Ріса.
3. Лінійні неперервні оператори. Норма оператора. Самоспряжені, цілком неперервні оператори.
4. Необмежені оператори.
5. Визначення просторів $W_m^l(\Omega)$ і $\dot{W}_m^l(\Omega)$.
6. Простори $W_2^1(\Omega)$ і $\dot{W}_2^1(\Omega)$ і їх основні властивості.
7. Мультиплікативні нерівності для елементів просторів $W_m^l(\Omega)$ і $\dot{W}_m^l(\Omega)$.
8. Теореми вкладення для просторів $W_m^l(\Omega)$ і $\dot{W}_m^l(\Omega)$.
9. Постановка крайових задач.
10. Узагальнені розв'язки з $W_2^1(\Omega)$. Перша енергетична нерівність.
11. Скалярний добуток в просторі $\dot{W}_2^1(\Omega)$.
12. Дослідження розв'язності задачі Діріхле в просторі $W_2^1(\Omega)$ (три теореми Фредгольма).
13. Теореми розвинення за власними функціями симетричних операторів.
14. Друга і третя крайові задачі.
15. Друга основна нерівність для еліптичних операторів.
16. Розв'язність задачі Діріхле в просторі $W_2^2(\Omega)$.

11. Рекомендована література

Основна література дисципліни

1. O.A. Ladyzenskaya, N.A. Solonnikov and N.N. Ural'tzeva, Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type, Translations of Mathematical Monographs, 23, American Mathematical Society, Providence, RI, 1967.
2. O.A. Ladyzenskaya and N.N. Ural'tzeva, Linear and Quasilinear Elliptic Equations, Academic Press, New York, 1968.
3. D. Gilbarg and N.S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, 2nd ed., Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No. 224, Springer-Verlag, Berlin, 1983.