

**НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ**

«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Директор ІПММ НАН України,
академік НАН України



_____ Ігор СКРИПНІК
« 25 » вересня 2025 р.

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Математичні методи дослідження складних механічних систем

**підготовки здобувачів ступеня вищої освіти
третій (освітньо-науковий)
доктора філософії**

галузь знань 11 Математика та статистика

спеціальність 113 Прикладна математика

Черкаси – 2025 р.

Робоча навчальна програма навчальної дисципліни «Математичні методи дослідження складних механічних систем» для здобувачів наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 Прикладна математика.

Розробник:

Кононов Юрій Микитович, завідувач відділом теорії керуючих систем, доктор фізико-математичних наук, професор.

Робочу програму схвалено на засіданні відділу теорії керуючих систем
Протокол № 4 від 18 вересня 2025 року.

Завідувач відділу теорії керуючих систем



Ю.М. Кононов

Схвалено Науково-методичною радою Інституту прикладної математики і механіки НАН України.

Протокол № 4 від 22 вересня 2025 року.

Голова науково-методичної ради



О.В. Несмєлова

1. Опис навчальної дисципліни

Найменування показників	Галузь знань, напрям підготовки, освітньо-кваліфікаційний рівень	Характеристика навчальної дисципліни
Кількість кредитів - 4	Галузь знань: 11 Математика та статистика	Вибіркова
Загальна кількість годин –120	Спеціальність: 113 Прикладна математика	Рік підготовки:
		1-2
		Семестр
		2-3
		Лекції
Тижневих годин: аудиторних – 1,5 самостійної роботи – 1,7	Освітньо-кваліфікаційний рівень: доктор філософії	28 год.
		Практичні
		28 год.
		Самостійна робота
		64 год.
		Вид контролю: іспит

2. Мета, завдання та очікувані результати навчальної дисципліни.

Метою вивчення навчальної дисципліни «Математичні методи дослідження складних механічних систем» є поглиблене знайомство з сучасними математичними методами дослідження динаміки і стійкості руху складних механічних систем, поглиблене знайомство з колом задач руху твердого та пружного тіла з рідиною, теоретичної гідромеханіки, теорії пружності, гідропружності та теорії стійкості руху. Для вивчення цього курсу аспіранти повинні володіти основними поняттями та фактами, що викладаються в курсах теоретичної механіки, теоретичної гідромеханіки, математичної фізики, загальних курсів математичного аналізу, вищої алгебри та диференціальних рівнянь.

Вивчення даної дисципліни значною мірою сприяє формуванню у аспірантів наукового світогляду.

Завдання навчальної дисципліни:

- сучасні математичні методи дослідження динаміки та стійкості руху складних механічних систем;
- основні фізичні і математичні моделі для побудови і дослідження сучасних задач динаміки та стійкості руху складних механічних систем;
- методи зведення гібридних рівнянь руху складних механічних систем (звичайних диференціальних рівняння руху твердого тіла та диференціальних рівняння в частинних похідних теорії пружності і рідини) в лічильну систему звичайних диференціальних рівнянь;
- математичний опис складних механічних систем (Принцип Гамільтона-Остроградського. Узагальнене хвильове рівняння. Операторна запис рівнянь руху. Спектральна теорія самоспряжених лінійних операторів в гільбертовому просторі);
- стійкість сталих рухів складних систем (Стійкість по відношенню до частини змінних. Теореми про стійкість і нестійкість. Завдання мінімуму для твердого тіла з порожниною, що містить рідину. Правило "великої вісі");
- сучасні передові концептуальні та методологічні знання при розв'язання задач динаміки та стійкості руху складних механічних систем.

Очікувані результати навчальної дисципліни

Загальні компетентності:

1. **ЗК1.** Аналіз і синтез. Здатність до аналізу та синтезу на основі логічних аргументів та перевірених фактів; навички управління інформацією (уміння знаходити та аналізувати інформацію з різних джерел).
2. **ЗК2.** Дослідницька здатність. Компетентності ініціювати та виконувати (індивідуально або в науковій групі) наукові дослідження, що приводять до отримання нових знань; здатність застосовувати знання на практиці.
3. **ЗК3.** Гнучкість мислення. Набуття гнучкого способу мислення, який дає можливість зрозуміти й розв'язати проблеми та задачі, зберігаючи при цьому критичне відношення до усталених наукових концепцій.
4. **ЗК8.** Популяризаційні навички. Вміння спілкуватися із нефаківцями; здатність провести усну презентацію та написати зрозумілу статтю за результатами проведених досліджень, а також щодо сучасних концепцій у прикладній математиці для нефаківців у цій галузі; здатність спілкуватися з експертами з інших галузей.

Фахові компетентності:

1. **ФК2.** Здатність застосовувати сучасну методологію, загальні та спеціальні методи наукового дослідження за спеціальністю та обраною спеціалізацією.
2. **ФК5.** Уміння будувати адекватні математичні моделі, досліджувати побудовані моделі та визначати можливості їх застосування.
3. **ФК8.** Здатність здійснювати дослідження прикладних математичних задач з використанням спеціальних математичних пакетів та аналізувати отримані дані.
4. **ФК12.** Поглиблені знання з теорії оптимального керування, якісної теорії лінійних керованих систем та основ геометричної теорії нелінійних систем. Здатність застосовувати методи теорії керування для розв'язання задач оптимізації та синтезу законів керування для математичних моделей динамічних процесів у природничих та технічних науках.

Програмні результати навчання:

1. **ПРН4.** Вміти будувати та досліджувати математичні моделі фізичних, соціально-економічних, технічних, біологічних тощо процесів, систем, процесів, формалізувати проблеми, описані природною мовою, за допомогою математичних методів, застосовувати загальні підходи до математичного моделювання конкретних процесів.
2. **ПРН6.** Вміти пояснювати складні математичні концепції мовою, зрозумілою для нефаківців у галузі математики, представляти

результати наукових досліджень на наукових та популяризаційних заходах.

3. **ПРН9.** Вміти організувати неперервний власний саморозвиток і самовдосконалення, набуття гнучкого способу мислення при творчому дослідженні, в тому числі прикладних математичних проблем.

4. **ПРН11.** Мати ґрунтовні знання з математичної теорії керування, вміти застосовувати їх для розв'язання прикладних задач.

За результатами вивчення навчальної дисципліни здобувач доктора філософії повинен:

знати:

- основні поняття і рівняння руху твердого та пружного тіла з рідиною, методи зведення гібридних рівнянь руху складних механічних систем (звичайних диференціальних рівнянь руху твердого тіла та диференціальних рівнянь в частинних похідних теорії пружності і рідини) в лічильну систему звичайних диференціальних рівнянь;
- математичний опис складних механічних систем (Принцип Гамільтона-Остроградського. Узагальнене хвильове рівняння. Операторна запис рівнянь руху. Спектральна теорія самоспряжених лінійних операторів в гільбертовому просторі) ;
- метод Релея-Рітца-Гальоркіна (метод передбачуваних форм коливань) ;
- загальні властивості власних частот і власних форм розподілених систем (Рівняння вільних коливань в операторній формі. Енергетичні добутки. Ортогональність власних форм. Збіжність по енергетичній нормі) ;
- метод скінченних елементів. Зв'язок МСЕ з методом Рітца;
- стійкість сталих рухів складних систем (Стійкість по відношенню до частини змінних. Теореми про стійкість і нестійкості. Задача мінімуму для твердого тіла з порожниною, що містить рідину. Правило "великої вісі");
- варіаційні принципи в теорії власних коливань розподілених систем (Формула Релея. Основний варіаційний принцип. Варіаційний принцип Релея і Куранта) ;
- структура спектра власних частот (Дискретний, суцільний і змішаний спектри. Визначення власних частот. Точні методи. Метод малого параметра (метод збурень). Метод послідовних наближень. Метод теорії лінійних інтегральних рівнянь. Асимптотичні методи).
- визначення власних частот і власних форм розподілених систем (Метод Релея і родинні методи. Метод Рітца. Метод Стодоли. Метод Бубнова-Гальоркіна. Зв'язок між методами Бубнова-Гальоркіна і Рітца. Застосування методу Бубнова-Гальоркіна до інтегральних рівнянь. Метод Граммель).

уміти :

- записати рівняння руху твердого та пружного тіла з рідиною, використовувати методи зведення гібридних рівнянь руху складних механічних систем (звичайних диференціальних рівнянь руху твердого тіла та диференціальних рівнянь в частинних похідних теорії пружності і рідини) в лічильну систему звичайних диференціальних рівнянь;
- зробити математичний опис складних механічних систем (Принцип Гамільтона-Остроградського. Узагальнене хвильове рівняння. Операторна запис рівнянь руху. Спектральна теорія самоспряжених лінійних операторів в гільбертовому просторі);
- використовувати метод Релея-Рітца-Гальоркіна (метод передбачуваних форм коливань);
- сформулювати загальні властивості власних частот і власних форм розподілених систем (Рівняння вільних коливань в операторній формі. Енергетичні добутки. Ортогональність власних форм. Збіжність по енергетичній нормі);
- застосовувати метод скінченних елементів. Зв'язок МСЕ з методом Рітца;
- визначати стійкість сталих рухів складних систем (Стійкість по відношенню до частини змінних. Теореми про стійкість і нестійкості. Завдання мінімуму для твердого тіла з порожниною, що містить рідину. Правило "великої вісі");
- користуватися варіаційними принципами в теорії власних коливань розподілених систем (Формула Релея. Основний варіаційний принцип. Варіаційний принцип Релея і Куранта);
- визначати структуру спектру власних частот (Дискретний, суцільний і змішаний спектри. Визначення власних частот. Точні методи. Метод малого параметра (метод збурень). Метод послідовних наближень. Метод теорії лінійних інтегральних рівнянь. Асимптотичні методи);
- визначати власні частоти і власні форми розподілених систем (Метод Релея і родинні методи. Метод Рітца. Метод Стодоли. Метод Бубнова-Гальоркіна. Зв'язок між методами Бубнова-Гальоркіна і Рітца. Застосування методу Бубнова-Гальоркіна до інтегральних рівнянь. Метод Граммель).

3. Програма навчальної дисципліни

1. Складні механічні системи. Рівняння складних механічних систем на прикладі руху твердого тіла з рідиною і твердого тіла з пружними відсіками з рідиною.
2. Методи зведення гібридних рівнянь руху СМС (звичайних диференціальних рівняння руху твердого тілі та диференціальних рівняння в частинних похідних пружності і рідини) в лічильну систему звичайних диференціальних рівнянь.
3. Математичний опис складних механічних систем (Принцип Гамільтона-Остроградського. Узагальнене хвильове рівняння. Операторна запис рівнянь руху. Спектральна теорія самоспряжених лінійних операторів в гільбертовому просторі).
4. Метод Релея-Рітца-Гальоркіна (метод передбачуваних форм коливань).
5. Загальні властивості власних частот і власних форм розподілених систем (Рівняння вільних коливань в операторної формі. Енергетичні добутки. Ортогональність власних форм. Збіжність по енергетичній нормі).
6. Модальний аналіз (Розкладання за власними формами коливань. Властивості частот і форм коливань).
7. Метод скінченних елементів. Зв'язок МСЕ з методом Рітца.
8. Стійкість сталих рухів складних систем (Стійкість по відношенню до частини змінних. Теореми про стійкість і нестійкості. Завдання мінімуму для твердого тіла з порожниною, що містить рідину. Правило "великої вісі").
9. Загальні рівняння руху пружного тіла з рідиною (Динамічні величини пружного тіла з рідиною, сили і моменти. Рівняння руху деформованої системи).
10. Варіаційні принципи в теорії власних коливань розподілених систем (Формула Релея. Основний варіаційний принцип. Варіаційний принцип Релея і Куранта).
11. Структура спектра власних частот (Дискретний, суцільний і змішаний спектри. Визначення власних частот. Точні методи. Метод малого параметра (метод збурень). Метод послідовних наближень. Метод теорії лінійних інтегральних рівнянь. Асимптотичні методи).
12. Визначення власних частот і власних форм розподілених систем (Метод Релея і родинні методи. Метод Рітца. Метод Стодоли. Метод Бубнова-Гальоркіна. Зв'язок між методами Бубнова-Гальоркіна і Ритца. Застосування методу Бубнова-Гальоркіна до інтегральних рівнянь. Метод Граммель).
13. Узагальнення методу Бубнова-Гальоркіна. Метод Власова-Канторовича. Метод внутрішньої колокації. Зв'язок методу внутрішньої колокації з методом Бубнова-Гальоркіна. Метод мінімуму середньоквадратичної помилки. Метод динамічних жорсткостей. Зв'язок методу динамічних жорсткостей з МСЕ. Метод динамічних податливостей).

14. Динамічна стійкість розподілених систем (Вільні коливання розподілених неконсервативних систем. Розподілені дисипативні системи. Метод нормальних координат. Метод нормальних координат. Метод функціоналів Ляпунова. Спрощений метод дослідження стійкості).

4. Структура навчальної дисципліни

Назва теми	Кількість годин			
	Усього	у тому числі		
		Лекції	Практичні Заняття	Самостійна Робота
1	2	3	4	5
1. Складні механічні системи. Рівняння складних механічних систем на прикладі руху твердого тіла з рідиною і твердого тіла з пружними відсіками з рідиною	8	2	2	4
2. Методи зведення гібридних рівнянь руху СМС (звичайних диференціальних рівнянь руху твердого тіла та диференціальних рівнянь в частинних похідних пружності і рідини) в лічильну систему звичайних диференціальних рівнянь	8	2	2	4
3. Математичний опис складних механічних систем (Принцип Гамільтона-Остроградського. Узагальнене хвильове рівняння. Операторна запис рівнянь руху. Спектральна теорія самоспряжених лінійних операторів в гільбертовому просторі)	8	2	2	4
4. Метод Релея-Рітца-Гальоркіна (метод передбачуваних форм коливань).	8	2	2	4
5. Загальні властивості власних частот і власних форм розподілених систем (Рівняння вільних коливань в операторній формі. Енергетичні добутки. Ортогональність власних форм. Збіжність по енергетичній нормі)	8	2	2	4
6. Модальний аналіз (Розкладання за власними формами коливань. Властивості частот і форм коливань)	8	2	2	4
7. Метод скінченних елементів. Зв'язок МСЕ з методом Рітца	8	2	2	4
8. Стійкість сталих рухів складних систем (Стійкість по відношенню до частини змінних. Теореми про	8	2	2	4

стійкість і нестійкості. Завдання мінімуму для твердого тіла з порожниною, що містить рідину. Правило "великої вісі")				
9. Загальні рівняння руху пружного тіла з рідиною (Динамічні величини пружного тіла з рідиною, сили і моменти. Рівняння руху деформованої системи)	8	2	2	4
10. Варіаційні принципи в теорії власних коливань розподілених систем (Формула Релея. Основний варіаційний принцип. Варіаційний принцип Релея і Куранта)	8	2	2	4
11. Структура спектра власних частот (Дискретний, суцільний і змішаний спектри. Визначення власних частот. Точні методи. Метод малого параметра (метод збурень). Метод послідовних наближень. Метод теорії лінійних інтегральних рівнянь. Асимптотичні методи).	10	2	2	6
12. Визначення власних частот і власних форм розподілених систем (Метод Релея і родинні методи. Метод Рітца. Метод Стодоли. Метод Бубнова-Гальоркіна. Зв'язок між методами Бубнова-Гальоркіна і Ритца. Застосування методу Бубнова-Гальоркіна до інтегральних рівнянь. Метод Граммель).	10	2	2	6
13. Узагальнення методу Бубнова-Гальоркіна. Метод Власова-Канторовича. Метод внутрішньої колокації. Зв'язок методу внутрішньої колокації з методом Бубнова-Гальоркіна. Метод мінімуму середньоквадратичної помилки. Метод динамічних жорсткостей. Зв'язок методу динамічних жорсткостей з МСЕ. Метод динамічних податливостей)	10	2	2	6
14. Динамічна стійкість розподілених систем (Вільні коливання розподілених неконсервативних систем. Розподілені дисипативні системи. Метод нормальних координат. Метод нормальних координат. Метод функціоналів Ляпунова. Спрощений метод дослідження стійкості)	10	2	2	6
Усього годин	120	28	28	64

5. Теми практичних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Складні механічні системи. Рівняння складних механічних систем на прикладі руху твердого тіла з рідиною і твердого тіла з пружними відсіками з рідиною	2
2	Методи зведення гібридних рівнянь руху складних механічних систем (звичайних диференціальних рівнянь руху твердого тіла та диференціальних рівнянь в частинних похідних пружності і рідини) в лічильну систему звичайних диференціальних рівнянь	2
3	Математичний опис складних механічних систем (Принцип Гамільтона-Остроградського. Узагальнене хвильове рівняння. Операторна запис рівнянь руху. Спектральна теорія самоспряжених лінійних операторів в гільбертовому просторі)	2
4	Метод Релея-Рітца-Гальоркіна (метод передбачуваних форм коливань).	2
5	Загальні властивості власних частот і власних форм розподілених систем (Рівняння вільних коливань в операторній формі. Енергетичні добутки. Ортогональність власних форм. Збіжність по енергетичній нормі)	2
6	Модальний аналіз (Розкладання за власними формами коливань. Властивості частот і форм коливань)	2
7	Метод скінченних елементів. Зв'язок МСЕ з методом Рітца	2
8	Стійкість сталих рухів складних систем (Стійкість по відношенню до частини змінних. Теореми про стійкість і нестійкості. Завдання мінімуму для твердого тіла з порожниною, що містить рідину. Правило "великої вісі")	2
9	Загальні рівняння руху пружного тіла з рідиною (Динамічні величини пружного тіла з рідиною, сили і моменти. Рівняння руху деформованої системи)	2
10	Варіаційні принципи в теорії власних коливань розподілених систем (Формула Релея. Основний варіаційний принцип. Варіаційний принцип Релея і Куранта)	2
11	Структура спектра власних частот (Дискретний, суцільний і змішаний спектри. Визначення власних частот. Точні методи. Метод малого параметра (метод збурень). Метод послідовних наближень).	2
12	Визначення власних частот і власних форм розподілених систем (Метод Релея і родинні методи. Метод Рітца. Метод Стодоли. Метод Бубнова-Гальоркіна. Зв'язок між методами Бубнова-Гальоркіна і Рітца).	2
13	Узагальнення методу Бубнова-Гальоркіна. Метод Власова-Канторовича. Метод внутрішньої колокації. Зв'язок методу внутрішньої колокації з методом Бубнова-Гальоркіна. Метод мінімуму середньоквадратичної помилки. Метод динамічних жорсткостей)	2

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
14	Динамічна стійкість розподілених систем (Вільні коливання розподілених неконсервативних систем. Розподілені дисипативні системи. Метод нормальних координат. Метод функціоналів Ляпунова)	2
	Разом	28

6. Теми для самостійної роботи

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Рівняння складних механічних систем на прикладі руху твердого тіла з рідиною і твердого тіла з пружними відсіками з рідиною	4
2	Методи зведення гібридних рівнянь руху складних механічних систем в лічильну систему звичайних диференціальних рівнянь	4
3	Математичний опис складних механічних систем (Принцип Гамільтона-Остроградського. Узагальнене хвильове рівняння. Операторна запис рівнянь руху. Спектральна теорія самоспряжених лінійних операторів в гільбертовому просторі)	4
4	Метод Релея-Рітца-Гальоркіна (метод передбачуваних форм коливань).	4
5	Загальні властивості власних частот і власних форм розподілених систем (Рівняння вільних коливань в операторній формі. Енергетичні добутки. Ортогональність власних форм. Збіжність по енергетичній нормі)	4
6	Модальний аналіз (Розкладання за власними формами коливань. Властивості частот і форм коливань)	4
7	Метод скінченних елементів. Зв'язок МСЕ з методом Рітца	4
8	Стійкість сталих рухів складних систем (Стійкість по відношенню до частини змінних. Теореми про стійкість і нестійкості. Завдання мінімуму для твердого тіла з порожниною, що містить рідину. Правило "великої вісі")	4
9	Загальні рівняння руху пружного тіла з рідиною (Динамічні величини пружного тіла з рідиною, сили і моменти. Рівняння руху деформованої системи)	4
10	Варіаційні принципи в теорії власних коливань розподілених систем (Формула Релея. Основний варіаційний принцип. Варіаційний принцип Релея і Куранта)	4
11	Структура спектра власних частот (Дискретний, суцільний і змішаний спектри. Визначення власних частот. Точні методи. Метод малого параметра (метод збурень). Метод послідовних наближень. Метод теорії лінійних інтегральних рівнянь. Асимптотичні методи).	6
12	Визначення власних частот і власних форм розподілених систем (Метод Релея і родинні методи. Метод Рітца. Метод Стодоли. Метод Бубнова-Гальоркіна. Зв'язок між методами Бубнова-Гальоркіна і Рітца. Застосування методу Бубнова-Гальоркіна до інтегральних рівнянь. Метод Граммель).	6

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
13	Узагальнення методу Бубнова-Гальоркіна. Метод Власова-Канторовича. Метод внутрішньої колокації. Зв'язок методу внутрішньої колокації з методом Бубнова-Гальоркіна. Метод мінімуму середньоквадратичної помилки. Метод динамічних жорсткостей. Зв'язок методу динамічних жорсткостей з МСЕ. Метод динамічних податливостей)	6
14	Динамічна стійкість розподілених систем (Вільні коливання розподілених неконсервативних систем. Розподілені дисипативні системи. Метод нормальних координат. Метод нормальних координат. Метод функціоналів Ляпунова. Спрощений метод дослідження стійкості)	6
	Разом	64

7. Методи навчання

При викладанні навчальної дисципліни «Вибіркові розділи механіки суцільного середовища» використовуються такі методи навчання: метод проблемного навчання, евристичне навчання, модульно-рейтингова система навчання.

8. Методи контролю

Використовуються наступні методи контролю:

1. Поточний контроль знань:

- усне опитування;
- виконання практичних робіт;
- тестування;
- виконання дослідницьких завдань.

2. Підсумковий контроль знань (іспит):

- підсумковий тест або екзаменаційні білети.

9. Критерії оцінювання результатів навчання

Розподіл балів, які отримує аспірант

Аудиторна робота													Самостійна Робота	Підсумковий контроль (іспит)	Загальна кількість отриманих балів
Теми															
T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7 T8	T9	T10	T11	T12	T13	T14			
2	2	2	2	2	2	4	4	4	4	4	4	4	20	40	100

Шкала оцінювання

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка за національною шкалою
	для іспиту
90-100	«відмінно» - здобувач повно і всебічно розкриває питання теми, вільно оперує поняттями і термінологією, демонструє глибокі знання джерел, має власну точку зору стосовно відповідної теми і може аргументовано її доводити
75-89	«добре» - загалом рівень знань здобувачів відповідає викладеному вище, але мають місце деякі упущення при виконанні завдань, обґрунтування неточні, не підтверджуються достатньо обґрунтованими доказами
60-74	«задовільно» - здобувач розкрив питання, в загальних рисах, розуміє їх суть, намагається робити висновки, але при цьому припускається грубих помилок, матеріал викладає нелогічно і не самостійно
35-59	«незадовільно» - з можливістю повторного складання, здобувач не в змозі дати відповідь на поставлене запитання або відповідь неправильна, не розуміє суті питання, не може зробити висновки
0-34	«незадовільно» - з обов'язковим повторним вивченням дисципліни

10. Орієнтовний перелік питань до підсумкового контролю (іспиту)

1. Складні механічні системи. Рівняння складних механічних систем на прикладі руху твердого тіла з рідиною і твердого тіла з пружними відсіками з рідиною.
2. Методи зведення гібридних рівнянь руху СМС (звичайних диференціальних рівнянь руху твердого тіла та диференціальних рівнянь в частинних похідних пружності і рідини) в лічильну систему звичайних диференціальних рівнянь.
3. Математичний опис складних механічних систем (Принцип Гамільтона-Остроградського. Узагальнене хвильове рівняння. Операторна запис рівнянь руху. Спектральна теорія самоспряжених лінійних операторів в гільбертовому просторі).
4. Метод Релея-Рітца-Гальоркіна (метод передбачуваних форм коливань).
5. Загальні властивості власних частот і власних форм розподілених систем (Рівняння вільних коливань в операторній формі. Енергетичні добутки. Ортогональність власних форм. Збіжність по енергетичній нормі).
6. Модальний аналіз (Розкладання за власними формами коливань. Властивості частот і форм коливань).
7. Метод скінченних елементів. Зв'язок МСЕ з методом Рітца.

8. Стійкість сталих рухів складних систем (Стійкість по відношенню до частини змінних. Теореми про стійкість і нестійкості. Завдання мінімуму для твердого тіла з порожниною, що містить рідину. Правило "великої вісі").

9. Загальні рівняння руху пружного тіла з рідиною (Динамічні величини пружного тіла з рідиною, сили і моменти. Рівняння руху деформованої системи).

10. Варіаційні принципи в теорії власних коливань розподілених систем (Формула Релея. Основний варіаційний принцип. Варіаційний принцип Релея і Куранта).

11. Структура спектра власних частот (Дискретний, суцільний і змішаний спектри. Визначення власних частот. Точні методи. Метод малого параметра (метод збурень). Метод послідовних наближень. Метод теорії лінійних інтегральних рівнянь. Асимптотичні методи).

12. Визначення власних частот і власних форм розподілених систем (Метод Релея і родинні методи. Метод Рітца. Метод Стодоли. Метод Бубнова-Гальоркіна. Зв'язок між методами Бубнова-Гальоркіна і Ритца. Застосування методу Бубнова-Гальоркіна до інтегральних рівнянь. Метод Граммель).

13. Узагальнення методу Бубнова-Гальоркіна. Метод Власова-Канторовича. Метод внутрішньої колокації. Зв'язок методу внутрішньої колокації з методом Бубнова-Гальоркіна. Метод мінімуму середньоквадратичної помилки. Метод динамічних жорсткостей. Зв'язок методу динамічних жорсткостей з МСЕ. Метод динамічних податливостей).

14. Динамічна стійкість розподілених систем (Вільні коливання розподілених неконсервативних систем. Розподілені дисипативні системи. Метод нормальних координат. Метод функціоналів Ляпунова. Спрощений метод дослідження стійкості).

11. Рекомендована література

1. Mikhlin S.G. Variational methods in mathematical physics. New York: Macmillan, 1964.
2. Nayfe A.H. Introduction to Perturbation Techniques. Wiley Classics Library Edition Published, 1993.
3. Кононов Ю.М. Основні методи дослідження складних механічних систем: Методичний посібник зі спецкурсу "Динаміка тіл з порожнинами, що містять рідину". – Донецьк: ДонНУ, 2007. – 40 с.
4. Sobolev S.L. Applications Of Functional Analysis In Mathematical Physics, 1963.
5. Vibrations in technology. Reference book. In 6 volumes. (set) In Russian (ask us if in doubt)/Vibratsii v tekhnike. Spravochnik. V 6-ti tomakh. Head of Ed. V.N. Chelomey. Artobolevsky I.I. Bogolyubov A.N. Bolotin V.V. et al. Machine Building 1978-1981 352s. SKUalbcc57c69b745b2487.

6. Kopachevskii N. D., Krein S.G. Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics: Volume 1: Self-adjoint Problems for an Ideal Fluid (Operator Theory: Advances and Applications) Softcover reprint of the original 1st ed. 2001 Edition.
7. Moiseyev N.N., Rumyantsev V.V. Dynamic Stability of Bodies Containing. – Fluid Springer Science & Business Media, 2012.
8. Lukowsky Ivan A. Nonlinear Dynamics. Mathematical Models for Bodies with a Liquid – De Gruyter Studies in Mathematical Physics. Volume 27, 2015.
9. Ibrahim R.A. Recent Advances in Physics of Fluid Parametric Sloshing and Related Problems. *Journal of Fluids Engineering*. – 2015. – **137**. – P. 1 – 52.
10. Троценко В.А., Троценко Ю.В. Застосування варіаційних методів у спектральних задачах тонкостінних оболонок і гідропружності – Київ: Ін-т математики НАН України, Наук. думка, 2023. – 340 с.
11. Kononov Yu.M., Shevchenko V.P., Dzhukha Yu.O. Axially symmetric vibrations of elastic annular bases and a perfect two-layer liquid in a rigid annular cylindrical vessel. *Journal of Mathematical Sciences*, 2019, **240** (1), p. 98–112.
12. Kononov Yu.M., Dzhukha Yu.O. Vibrations of Two-Layer Ideal Liquid in a Rigid Cylindrical Vessel with Elastic Bases. *Journal of Mathematical Sciences* 2020, **246**, p. 365–383.
13. Kononov Yu. M. Stability of a Uniform Rotation of an Asymmetric Rigid Body in a Resisting Medium. *Int. Appl. Mech.* – 2021. – **57**, № 4. – P. 432 – 439.
14. Kononov Yuriy M. On the solution of a complicated biharmonic equation in a hydroelasticity problem. *Journal of Mathematical Scienc.* – 2023. – **274**, № 3. – P. 340 – 352.
15. Kononov Yuriy M. On the rotational stability in an environment with resistance of a free system of two rigid bodies connected by an elastic spherical joint and having a cavity with a liquid. *Journal of Mathematical Scienc.* – 2024. – **284**, № 3. – P. 345 – 356.