

**НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ**

«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Директор ІПММ НАН України
академік НАН України

Ігор СКРИПНІК

« 25 » вересня 2025 р.



РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Узагальнені функції

**підготовки здобувачів ступеня вищої освіти
треть (освітньо-науковий)
доктора філософії**

галузь знань 11 Математика та статистика

спеціальність 111 Математика

Черкаси – 2025 р.

Робоча навчальна програма навчальної дисципліни «Узагальнені функції» для здобувачів наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 Математика

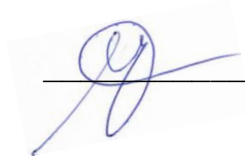
Розробник:

Скрипнік Ігор Ігорович, директор, завідувач відділу нелінійного аналізу та рівнянь математичної фізики Інституту прикладної математики і механіки НАН України, доктор фізико-математичних наук, доцент, академік НАН України

Робочу програму схвалено на засіданні відділу нелінійного аналізу та рівнянь математичної фізики

Протокол № 2 від 18.09.2025 року.

Завідувач відділу



І.І. Скрипнік

Схвалено Науково-методичною радою Інституту прикладної математики і механіки НАН України

Протокол № 4 від 22 вересня 2025 року.

Голова науково-методичної ради



О.В. Несмелова

1. Опис навчальної дисципліни

Найменування показників	Галузь знань, напрям підготовки, освітньо-кваліфікаційний рівень	Характеристика навчальної дисципліни	
Кількість кредитів - 4	Галузь знань: 11 Математика та статистика	Вибіркова	
Загальна кількість годин – 120	Спеціальність: 111 Математика	Рік підготовки:	
		1-2	
		Семестр	
		2-й	3-й
		Лекції	
Тижневих годин: аудиторних – 1,5; самостійної роботи – 1,7	Освітньо-кваліфікаційний рівень: доктор філософії	14	14
		Практичні	
		14	14
		Самостійна робота	
		32	32
		Вид контролю: іспит	

2. Мета, завдання та очікувані результати навчальної дисципліни.

Метою вивчення навчальної дисципліни «Узагальнені функції» є оволодіння теорією узагальнених функцій і ознайомлення зі застосуваннями узагальнених функцій до дослідження диференціальних рівнянь, рівнянь математичної фізики.

Завдання навчальної дисципліни: оволодіння основними поняттями та твердженнями теорії узагальнених функцій; оволодіння навиками розв'язування основних типів задач, передбачених програмою.

Очікувані результати навчальної дисципліни

Загальні компетентності:

1. Аналіз і синтез. Здатність до аналізу та синтезу на основі логічних аргументів та перевірених фактів; навички управління інформацією (уміння знаходити та аналізувати інформацію з різних джерел) (ЗК 1).
2. Дослідницька здатність. Компетентності ініціювати та виконувати (індивідуально або в науковій групі) наукові дослідження, що приводять до отримання нових знань; здатність застосовувати знання на практиці (ЗК 2).

3. Гнучкість мислення. Набуття гнучкого способу мислення, який дає можливість зрозуміти й розв'язати проблеми та задачі, зберігаючи при цьому критичне відношення до усталених наукових концепцій (ЗК 3).
4. Комунікативні навички. Здатність ефективно спілкуватися із спеціальною та загальною аудиторіями, а також представляти складну інформацію у зручний та зрозумілий спосіб усно і письмово, використовуючи відповідну технічну лексику та методи; навички використання інформаційних і комунікаційних технологій; здатність спілкуватися рідною та другою іноземною мовою як усно, так і письмово (ЗК 6).
5. Міжнародний кругозір. Здатність працювати в міжнародному середовищі, ставитися із повагою до національних та культурних традицій, способів роботи інших членів групи (ЗК 7).
6. Популяризаційні навички. Вміння спілкуватися із нефахівцями; здатність провести усну презентацію та написати зрозумілу статтю за результатами проведених досліджень, а також щодо сучасних концепцій у математиці для нефахівців у цій галузі; здатність спілкуватися з експертами з інших галузей (ЗК 8).
7. Етичні установки. Етика поведінки в наукових дослідженнях; турбота про якість результату (ЗК 11).
8. Особисті якості. Здатність до навчання, саморозвитку та самовдосконалення протягом життя; визначеність і наполегливість щодо поставлених завдань і взятих обов'язків (ЗК 12).

Фахові компетентності (згідно до переліку фахових компетентностей освітньої програми):

1. Здатність застосовувати сучасну методологію, загальні та спеціальні методи наукового дослідження за спеціальністю та обраною спеціалізацією (ФК 2).
2. Здатність логічно мислити, формулювати, строго доводити та перевіряти правильність математичних тверджень (ФК 4).
3. Оволодіння сучасними методами теорії граничних задач, теорії узагальнених функцій, теорії операторів (ФК 13).

Програмні результати навчання (згідно до переліку програмних результатів навчання освітньої програми):

1. Знати та розуміти традиційні та передові тенденції в галузі математики, етапи історичного розвитку математичних знань і парадигм, формування поглибленої системи наукових знань за напрямом досліджень (ПРН-1).
2. Знати основні принципи, форми та методи проведення наукових досліджень в галузі математики, володіти математичним апаратом в об'ємі, достатньому для професійної діяльності (ПРН-3).

3. Вміти за допомогою теоретичного математичного апарату досліджувати різноманітні природні явища та процеси, проводити аналіз впливу на них різних факторів, а також вивчати взаємодію між явищами з метою отримання переконливо доведених і корисних фундаментальних та практичних результатів (ПРН-5).
4. Здійснювати професійну письмову й усну комунікацію українською та іноземними мовами. Уміти працювати зі спеціальною літературою та наукометричними базами даних, в тому числі іноземною мовою (ПРН-8).
5. Вміти організувати неперервний власний саморозвиток і самовдосконалення, набуття гнучкого способу мислення при творчому дослідженні, в тому числі прикладних математичних проблем (ПРН-10).
6. Вміти формулювати наукові проблеми з огляду на цінні стін орієнтири сучасного суспільства та стану її поточного дослідження (ПРН-11).
7. Розв'язувати фундаментальні та прикладні задачі придатними математичними методами, перевіряти умови виконання математичних тверджень, коректно переносити умови та твердження на нові класи об'єктів, знаходити й аналізувати відповідності між поставленою задачею й відомими моделями, будувати та досліджувати нові математичні моделі (ПРН-12).
8. Знати теоретичні основи і застосовувати методи сучасної наукової теорії функціонального аналізу, основні властивості диференціальних операторів, узагальнених функцій і вміння ефективно застосовувати їх для синтезу і аналізу складних систем та явищ (ПРН-17).

За результатами вивчення навчальної дисципліни здобувач доктора філософії повинен:

знати:

- визначення просторів основних та узагальнених функцій;
- визначення операцій з основними, узагальненими функціями та їхні основні властивості;
- визначення перетворення Фур'є, згортки узагальнених функцій та їхні основні властивості;
- область застосування теорії узагальнених функцій.

уміти :

- розв'язувати стандартні задачі, доводити основні теореми курсу;
- використовувати отримані теоретичні знання в самостійних дослідженнях.

3. Програма навчальної дисципліни

Тема 1. Основні і узагальнені функції.

Поняття узагальненої функції. Щільність матеріальної точки. Дельта функція Дірака. Простір фінітних основних функцій. Функція "шапочка". Простір узагальнених функцій. Носій узагальненої функції. Регулярні і сингулярні узагальнені функції. Лемма Дю-Буа Реймона. Формули Сохоцького. Лінійна заміна змінних. Добуток узагальненої функції на нескінченно диференційовану функцію.

Тема 2. Диференціювання узагальнених функцій.

Диференціювання узагальнених функцій. Властивості узагальненої похідної. Первісна узагальненої функції. Приклади. Локальна структура узагальнених функцій. Узагальнені функції з компактним носієм. Узагальнені функції з точковим носієм.

Тема 3. Прямий добуток узагальнених функцій.

Означення прямого добутку. Властивості прямого добутку. Деякі застосування.

Тема 4. Згортка узагальнених функцій.

Означення згортки. Властивості згортки. Існування згортки.

Тема 5. Узагальнені функції повільного росту.

Поняття узагальненої функції повільного росту. Простір основних функцій. Простір узагальнених функцій повільного росту. Приклади узагальнених функцій повільного росту. Структура узагальнених функцій повільного росту. Прямий добуток та згортка узагальнених функцій повільного росту.

Тема 6. Перетворення Фур'є узагальнених функцій повільного росту.

Означення перетворення Фур'є. Властивості перетворення Фур'є. Перетворення Фур'є узагальнених функцій з компактним носієм. Перетворення Фур'є згортки. Приклади.

Тема 7. Деякі застосування

Поняття фундаментального розв'язку диференціального оператора. Фундаментальний розв'язок лінійного диференціального оператора зі сталими коефіцієнтами. Частковий розв'язок лінійного неоднорідного диференціального оператора зі сталими коефіцієнтами. Фундаментальний розв'язок лінійного диференціального оператора зі змінними коефіцієнтами. Частковий розв'язок лінійного неоднорідного диференціального оператора зі змінними коефіцієнтами і регулярною правою частиною.

4. Структура навчальної дисципліни

Назва теми	Кількість годин			
	Усього	у тому числі		
		Лекції	Практичні заняття	Самостійна робота
1	2	3	4	5
Тема 1. Основні і узагальнені функції	17	4	4	9
Тема 2. Диференціювання узагальнених функцій	17	4	4	9
Тема 3. Прямий добуток узагальнених функцій	17	4	4	9
Тема 4. Згортка узагальнених функцій	17	4	4	9
Тема 5. Узагальнені функції повільного росту	17	4	4	9
Тема 6. Перетворення Фур'є узагальнених функцій повільного росту	17	4	4	9
Тема 7. Деякі застосування	18	4	4	10
Усього годин	120	28	28	64

5. Теми практичних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Основні і узагальнені функції	4
2	Диференціювання узагальнених функцій	4
3	Прямий добуток узагальнених функцій	4
4	Згортка узагальнених функцій	4
5	Узагальнені функції повільного росту	4
6	Перетворення Фур'є узагальнених функцій повільного росту	4
7	Деякі застосування	4
	Разом	28

6. Теми для самостійної роботи

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Основні і узагальнені функції	9
2	Диференціювання узагальнених функцій	9
3	Прямий добуток узагальнених функцій	9
4	Згортка узагальнених функцій	9
5	Узагальнені функції повільного росту	9
6	Перетворення Фур'є узагальнених функцій повільного росту	9
7	Деякі застосування	10
	Разом	64

7. Методи навчання

При викладанні навчальної дисципліни «Узагальнені функції» використовуються такі методи навчання:

1. Пояснювально-ілюстративний метод. Аспіранти здобувають знання, слухаючи лекцію, з навчальної або методичної літератури, через екранний посібник у "готовому" вигляді. Сприймаючи й осмислюючи факти, оцінки, висновки, вони залишаються в межах репродуктивного мислення. Такий метод якнайширше застосовують для передавання значного масиву інформації. Його можна використовувати для викладення й засвоєння фактів, підходів, оцінок, висновків.
2. Дослідницький метод. Після аналізу матеріалу, постановки проблем та короткого усного або письмового інструктажу ті, кого навчають, самостійно вивчають літературу, шукають додаткову інформацію та виконують інші пошукові дії, після чого оброблюють отриману інформацію та роблять відповідні висновки. Ініціатива, самостійність, творчий пошук виявляються в дослідницькій діяльності найповніше.
3. Проблемно-пошуковий, основа якого полягає в утворенні у навчальному процесі пошукових ситуацій. Цей метод навчання розвиває активність, самостійність, творчі здібності.

8. Методи контролю

Використовуються наступні методи контролю:

1. Поточний контроль знань:
 - усне опитування;
 - виконання практичних робіт;
 - тестування;
 - виконання дослідницьких завдань.

2. Підсумковий контроль знань (іспит):
- у письмовій формі.

9. Критерії оцінювання результатів навчання

Розподіл балів, які отримує аспірант

Аудиторна робота							Самостійна робота	Підсумковий контроль (іспит)	Загальна кількість отриманих балів
теми									
T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7			
6	6	6	6	6	6	6	18	40	100

Шкала оцінювання

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка за національною шкалою
	для іспиту
90-100	«відмінно» - здобувач повно і всебічно розкриває питання теми, вільно оперує поняттями і термінологією, демонструє глибокі знання джерел, має власну точку зору стосовно відповідної теми і може аргументовано її доводити
75-89	«добре» - загалом рівень знань здобувачів відповідає викладеному вище, але мають місце деякі упущення при виконанні завдань, обґрунтування неточні, не підтверджуються достатньо обґрунтованими доказами
60-74	«задовільно» - здобувач розкрив питання, в загальних рисах, розуміє їх суть, намагається робити висновки, але при цьому припускається грубих помилок, матеріал викладає нелогічно і не самостійно
34-59	«незадовільно» - з можливістю повторного складання, здобувач не в змозі дати відповідь на поставлене запитання або відповідь неправильна, не розуміє суті питання, не може зробити висновки
0-35	«незадовільно» - з обов'язковим повторним вивченням дисципліни

10. Орієнтовний перелік питань до підсумкового контролю (іспиту)

1. Поняття узагальненої функції.
2. Простір основних функцій. Функція "шапочка".

3. Простір узагальнених функцій. Регулярні і сингулярні узагальнені функції.
4. Лемма Дю-Буа Реймона. Формули Сохоцкого.
5. Лінійна заміна змінних.
6. Добуток узагальненої функції на нескінченно диференційовану функцію.
7. Диференціювання узагальнених функцій. Властивості узагальненої похідної.
8. Первісна узагальненої функції.
9. Узагальнені функції з компактним носієм. Узагальнені функції з точковим носієм.
10. Прямий добуток узагальнених функцій. Властивості прямого добутку.
11. Згортка узагальнених функцій. Властивості згортки. Існування згортки.
12. Означення узагальнених функцій повільного росту. Простір основних функцій. Простір узагальнених функцій повільного росту.
13. Прямий добуток та згортка узагальнених функцій повільного росту.
14. Означення перетворення Фур'є. Властивості перетворення Фур'є.
15. Перетворення Фур'є узагальнених функцій з компактним носієм.
16. Перетворення Фур'є згортки.
17. Поняття фундаментального розв'язку диференціального оператора.
18. Фундаментальний розв'язок лінійного диференціального оператора зі сталими коефіцієнтами.
19. Частковий розв'язок лінійного неоднорідного диференціального оператора зі сталими коефіцієнтами.
20. Фундаментальний розв'язок лінійного диференціального оператора зі змінними коефіцієнтами.
21. Частковий розв'язок лінійного неоднорідного диференціального оператора зі змінними коефіцієнтами і регулярною правою частиною.

11. Рекомендована література

Основна література дисципліни

1. D. Gilbarg and N.S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, 2nd ed., Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No. 224, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
2. O.A. Ladyzenskaya, N.A. Solonnikov and N.N. Ural'tzeva, Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type, Translations of Mathematical Monographs, 23, American Mathematical Society, Providence, RI, 1967.
3. O.A. Ladyzenskaya and N.N. Ural'tzeva, Linear and Quasilinear Elliptic Equations, Academic Press, New York, 1968.