

**НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ  
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ**

**«ЗАТВЕРДЖУЮ»**

Директор ІПММ НАН України  
академік НАН України



Ігор СКРИПНІК

« 25 » вересня 2025 р.

**РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ**

**«INFINITESIMAL ANALYSIS OF MAPPINGS»**

**підготовки здобувачів ступеня вищої освіти  
треть (освітньо-науковий)  
доктора філософії**

**галузь знань 11 Математика та статистика**

**спеціальність 111 Математика**

Черкаси – 2025 р.

Робоча навчальна програма навчальної дисципліни «Infinitesimal Analysis of Mappings» для здобувачів наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 Математика

Розробник:

Гутлянский Володимир Якович, радник при дирекції, д.ф.-м.н., професор ІПММ НАН України, чл.-кор. НАН України;

Рязанов Володимир Ілліч, завідувач відділом теорії функцій, д.ф.-м.н., професор ІПММ НАН України

Робочу програму схвалено на засіданні відділу теорії функцій

Протокол № 3 від 17.09.2025 року.

Завідувач відділу



В.І. Рязанов

Схвалено Науково-методичною радою Інституту прикладної математики і механіки НАН України

Протокол № 4 від 22.09.2025 року.

Голова науково-методичної ради



Несмелова О.В.

### 1. Опис навчальної дисципліни

| Найменування показників                                         | Галузь знань, напрям підготовки, освітньо-кваліфікаційний рівень | Характеристика навчальної дисципліни |
|-----------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|--------------------------------------|
| Кількість кредитів -4                                           | Галузь знань:<br>11 Математика та статистика                     | Вибіркова                            |
| Загальна кількість годин – 120                                  | Спеціальність:<br>111 Математика                                 | Рік підготовки:                      |
|                                                                 |                                                                  | 1-2                                  |
|                                                                 |                                                                  | Семестр                              |
|                                                                 |                                                                  | 2-3                                  |
| Тижневих годин:<br>аудиторних – 1,5<br>самостійної роботи – 1,7 | Освітньо-кваліфікаційний рівень:<br>доктор філософії             | Лекції                               |
|                                                                 |                                                                  | 28 год                               |
|                                                                 |                                                                  | Практичні                            |
|                                                                 |                                                                  | 28 год                               |
|                                                                 |                                                                  | Самостійна робота                    |
|                                                                 |                                                                  | 64 год                               |
|                                                                 |                                                                  | Вид контролю: іспит                  |

## **1. Мета, завдання та очікувані результати навчальної дисципліни.**

**Метою** навчальної дисципліни навчальної дисципліни «Infinitesimal Analysis of Mappings» є поглиблене вивчення теорії інфінітезимального аналізу локальної і граничної поведінки квазіконформних відображень, а також теорії локальної і граничної поведінки гомеоморфних рішень тісно пов'язаних з ними рівнянь Бельтрамі.

**Завдання** навчальної дисципліни: оволодіння теорією збіжності і компактності квазіконформних відображень в контексті інфінітезимального аналізу їх локальної і граничної поведінки.

### **Очікувані результати навчальної дисципліни**

#### **Загальні компетентності:**

1. Аналіз і синтез. Здатність до аналізу та синтезу на основі логічних аргументів та перевірених фактів; навички управління інформацією (уміння знаходити та аналізувати інформацію з різних джерел) (ЗК 1).

2. Дослідницька здатність. Компетентності ініціювати та виконувати (індивідуально або в науковій групі) наукові дослідження, що приводять до отримання нових знань; здатність застосовувати знання на практиці. (ЗК 2).

3. Гнучкість мислення. Набуття гнучкого способу мислення, який дає можливість зрозуміти й розв'язати проблеми та задачі, зберігаючи при цьому критичне відношення до усталених наукових концепцій (ЗК 3).

4. Комунікативні навички. Здатність ефективно спілкуватися із спеціальною та загальною аудиторіями, а також представляти складну інформацію у зручній та зрозумілій спосіб усно і письмово, використовуючи відповідну технічну лексику та методи; навички використання інформаційних і комунікаційних технологій; здатність спілкуватися рідною та другою іноземною мовою як усно, так і письмово (ЗК 6).

5. Міжнародний кругозір. Здатність працювати в міжнародному середовищі, ставитися із повагою до національних та культурних традицій, способів роботи інших членів групи (ЗК 7).

6. Популяризаційні навички. Вміння спілкуватися із нефахівцями; здатність провести усну презентацію та написати зрозумілу статтю за результатами проведених досліджень, а також щодо сучасних концепцій у математиці для нефахівців у цій галузі (ЗК 8).

7. Етичні установки. Етика поведінки в наукових дослідженнях; турбота про якість результату (ЗК 11).

8. Особисті якості. Здатність до навчання, саморозвитку та самовдосконалення протягом життя; визначеність і наполегливість щодо поставлених завдань і взятих обов'язків (ЗК 12).

### **Фахові компетентності:**

1. Здатність застосовувати сучасну методологію, загальні та спеціальні методи наукового дослідження за спеціальністю та обраною спеціалізацією (ФК 2).
2. Здатність логічно мислити, формулювати, строго доводити та перевіряти правильність математичних тверджень (ФК 4).
3. Здатність застосовувати спеціальні методи в теорії відображень та теорії аналітичних функцій і їх узагальнень (ФК 11).

### **Програмні результати навчання:**

1. Знати та розуміти традиційні та передові тенденції в галузі математики, етапи історичного розвитку математичних знань і парадигм, формування поглибленої системи наукових знань за напрямом досліджень (ПРН 1).
2. Знати основні принципи, форми та методи проведення наукових досліджень в галузі математики, володіти математичним апаратом в об'ємі, достатньому для професійної діяльності (ПРН 3).
3. Вміти за допомогою теоретичного математичного апарату досліджувати різноманітні природні явища та процеси, проводити аналіз впливу на них різних факторів, а також вивчати взаємодію між явищами з метою отримання переконливо доведених і корисних фундаментальних та практичних результатів (ПРН 5).
4. Здійснювати професійну письмову й усну комунікацію українською та іноземними мовами. Уміти працювати зі спеціальною літературою та наукометричними базами даних, в тому числі іноземною мовою (ПРН 8).
5. Вміти організувати неперервний власний саморозвиток і самовдосконалення, набуття гнучкого способу мислення при творчому дослідженні, в тому числі прикладних математичних проблем (ПРН 10).
6. Вміти формулювати наукові проблеми з огляду на цінні стін орієнтири сучасного суспільства та стану її поточного дослідження (ПРН 11).
7. Розв'язувати фундаментальні та прикладні задачі придатними математичними методами, перевіряти умови виконання математичних тверджень, коректно переносити умови та твердження на нові класи об'єктів, знаходити й аналізувати відповідності між поставленою задачею й відомими моделями, будувати та досліджувати нові математичні моделі (ПРН 12).
8. Знати теоретичні основи і застосовувати спеціальні методи дослідження в теорії функцій комплексного змінного та теорії квазіконформних відображень (ПРН 13).
9. Поглиблені знання з теорії збіжності і компактності квазіконформних відображень в контексті інфінітезімального аналізу їх локальної і граничної поведінки (ПРН 15).

За результатами вивчення навчальної дисципліни здобувач доктора філософії повинен:

**знати:**

- Основні теореми збіжності і компактності квазіконформних відображень.
- Критерії асимптотичної конформності і однорідності гомеоморфних рішень рівнянь Бельтрамі.
- Критерії асимптотичної симетрії гомеоморфних рішень рівнянь Бельтрамі на межі.

**вміти:**

- Використовувати теорію інфінітезімального аналізу для вивчення локальної і граничної поведінки квазіконформних відображень.
- Вміння використовувати теорію збіжності квазіконформних відображень при аналізі їх локальної і граничної поведінки.
- Використовувати теорію інфінітезімального аналізу для вивчення регулярності квазіконформних кривих.

## 2. Програма навчальної дисципліни

**Тема 1.** General convergence properties of quasiconformal mappings

---

**Тема 2.** Equicontinuity properties of quasiconformal mappings

---

**Тема 3.** Dilatation and convergence of quasiconformal mappings

---

**Тема 4.** Convergence theorems and majorizing metrics

---

**Тема 5.** Definition of the infinitesimal space at a point

---

**Тема 6.** The case of simple infinitesimal spaces

---

**Тема 7.** Approximate continuity and infinitesimal spaces

---

**Тема 8.** Weak conformality of quasiconformal mappings

---

**Тема 9.** Asymptotic symmetry on the boundary

---

**Тема 10.** On asymptotically conformal curves

---

**Тема 11.** Asymptotic homogeneity and conformality

---

**Тема 12.** Criteria for asymptotic conformality

---

**Тема 13.** Asymptotic symmetry and conformality

---

**Тема 14.** Teichmüller–Wittich–Belinskii’s type theorem

---

### 3. Структура навчальної дисципліни

| Назва теми                                                        | Кількість годин |              |                   |                   |
|-------------------------------------------------------------------|-----------------|--------------|-------------------|-------------------|
|                                                                   | Усього          | у тому числі |                   |                   |
|                                                                   |                 | Лекції       | Практичні заняття | Самостійна робота |
| 1                                                                 | 2               | 3            | 4                 | 5                 |
| Тема 1. General convergence properties of quasiconformal mappings | 8               | 2            | 2                 | 4                 |
| Тема 2. Equicontinuity properties of quasiconformal mappings      | 10              | 2            | 2                 | 6                 |
| Тема 3. Dilatation and convergence of quasiconformal mappings     | 8               | 2            | 2                 | 4                 |
| Тема 4. Convergence theorems and majorizing metrics               | 8               | 2            | 2                 | 4                 |
| Тема 5. Definition of the infinitesimal space at a point          | 8               | 2            | 2                 | 4                 |
| Тема 6. The case of simple infinitesimal spaces                   | 8               | 2            | 2                 | 4                 |
| Тема 7. Approximate continuity and infinitesimal spaces           | 10              | 2            | 2                 | 6                 |
| Тема 8. Weak conformality of quasiconformal mappings              | 10              | 2            | 2                 | 6                 |
| Тема 9. Asymptotic symmetry on the boundary                       | 8               | 2            | 2                 | 4                 |
| Тема 10. On asymptotically conformal curves                       | 8               | 2            | 2                 | 4                 |
| Тема 11. Asymptotic homogeneity and conformality                  | 8               | 2            | 2                 | 4                 |
| Тема 12. Criteria for asymptotic conformality                     | 10              | 2            | 2                 | 6                 |
| Тема 13. Asymptotic symmetry and conformality                     | 8               | 2            | 2                 | 4                 |
| Тема 14. Teichmüller–Wittich–Belinskii’s type theorem             | 8               | 2            | 2                 | 4                 |
| <b>Усього годин</b>                                               | <b>120</b>      | <b>28</b>    | <b>28</b>         | <b>64</b>         |

#### 4. Теми практичних занять

| № з/п | Назва теми                                             | Кількість годин |
|-------|--------------------------------------------------------|-----------------|
| 1     | Sufficient conditions of points of maximal stretching  | 2               |
| 2     | Criterion of maximal stretching                        | 2               |
| 3     | Growth estimates of quasiconformal mappings            | 2               |
| 4     | Conditions for Lipschitz continuity                    | 2               |
| 5     | Weak Lipschitz continuity                              | 2               |
| 6     | Regularity of boundary correspondence                  | 2               |
| 7     | Smoothness of quasicircles                             | 2               |
| 8     | Lindelöf's smoothness theorem                          | 2               |
| 9     | Warschawski's Conformality Theorem                     | 2               |
| 10    | Modulus estimates under quasiconformal mappings        | 2               |
| 11    | Conformal differentiability of quasiconformal mappings | 2               |
| 12    | Weak conformality of quasiconformal mappings           | 2               |
| 13    | Conformality on a set of quasiconformal mappings       | 2               |
| 14    | Weak conformality on a set of quasiconformal mappings  | 2               |
|       | <b>Разом</b>                                           | <b>28</b>       |

#### 5. Теми для самостійної роботи

| № з/п | Назва теми                                             | Кількість годин |
|-------|--------------------------------------------------------|-----------------|
| 1     | Sufficient conditions of points of maximal stretching  | 4               |
| 2     | Criterion of maximal stretching                        | 6               |
| 3     | Growth estimates of quasiconformal mappings            | 4               |
| 4     | Conditions for Lipschitz continuity                    | 4               |
| 5     | Weak Lipschitz continuity                              | 4               |
| 6     | Regularity of boundary correspondence                  | 4               |
| 7     | Smoothness of quasicircles                             | 6               |
| 8     | Lindelöf's smoothness theorem                          | 6               |
| 9     | Warschawski's Conformality Theorem                     | 4               |
| 10    | Modulus estimates under quasiconformal mappings        | 4               |
| 11    | Conformal differentiability of quasiconformal mappings | 4               |
| 12    | Weak conformality of quasiconformal mappings           | 6               |
| 13    | Conformality on a set of quasiconformal mappings       | 4               |
| 14    | Weak conformality on a set of quasiconformal mappings  | 4               |
|       | <b>Разом</b>                                           | <b>64</b>       |

## 6. Методи навчання

При викладанні навчальної дисципліни «Beltrami Equation: Geometric Approach» використовуються такі методи навчання: проблемно-пошуковий, пояснювально-ілюстративний, дослідницький, пошуковий, тощо. Освітній процес побудований на принципах особистісно орієнтованого навчання, на основі компетентнісного, системного, підходів що складає: проблемно-орієнтоване навчання; індивідуальні консультації фахівців Інституту прикладної математики і механіки НАН України, інших установ НАН України.

## 8. Методи контролю

**Використовуються наступні методи контролю:**

1. Поточний контроль знань:
  - усне опитування;
  - виконання практичних робіт;
  - тестування;
  - виконання дослідницьких завдань.
2. Підсумковий контроль знань (іспит):
  - підсумковий тест або екзаменаційні білети.

## 9. Критерії оцінювання результатів навчання

**Розподіл балів, які отримує аспірант**

| Аудиторна робота |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     | Самостійна<br>робота | Підсумковий<br>контроль (іспит) | Загальна кількість<br>отриманих балів |
|------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|----------------------|---------------------------------|---------------------------------------|
| теми             |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |                      |                                 |                                       |
| T1               | T2 | T3 | T4 | T5 | T6 | T7 | T8 | T9 | T10 | T11 | T12 | T13 | T14 |                      |                                 |                                       |
| 3                | 4  | 3  | 3  | 3  | 3  | 4  | 3  | 3  | 3   | 3   | 3   | 3   | 4   | 15                   | 40                              | 100                                   |

### Шкала оцінювання

| Сума балів за всі види навчальної діяльності | Оцінка за національною шкалою                                                                                                                                                                                              |
|----------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                              | для іспиту                                                                                                                                                                                                                 |
| <b>90-100</b>                                | «відмінно» - здобувач повно і всебічно розкриває питання теми, вільно оперує поняттями і термінологією, демонструє глибокі знання джерел, має власну точку зору стосовно відповідної теми і може аргументовано її доводити |
| <b>75-89</b>                                 | «добре» - загалом рівень знань здобувачів відповідає викладеному вище, але мають місце деякі упущення при виконанні завдань, обґрунтування неточні, не підтверджуються достатньо обґрунтованими доказами                   |
| <b>60-74</b>                                 | «задовільно» - здобувач розкрив питання, в загальних рисах, розуміє їх суть, намагається робити висновки, але при цьому припускається грубих помилок, матеріал викладає нелогічно і не самостійно                          |
| <b>35-59</b>                                 | «незадовільно» - з можливістю повторного складання, здобувач не в змозі дати відповідь на поставлене запитання або відповідь неправильна, не розуміє суті питання, не може зробити висновки                                |
| <b>0-34</b>                                  | «незадовільно» - з обов'язковим повторним вивченням дисципліни                                                                                                                                                             |

### 10. Орієнтовний перелік питань до підсумкового контролю (іспиту)

1. General convergence properties of quasiconformal mappings
2. Equicontinuity properties of quasiconformal mappings
3. Dilatation and convergence of quasiconformal mappings
4. Convergence theorems and majorizing metrics
5. Definition of the infinitesimal space at a point
6. The case of simple infinitesimal spaces
7. Approximate continuity and infinitesimal spaces
8. Weak conformality of quasiconformal mappings
9. Asymptotic symmetry on the boundary
10. On asymptotically conformal curves
11. Asymptotic homogeneity and conformality
12. Criteria for asymptotic conformality
13. Asymptotic symmetry and conformality
14. Teichmüller–Wittich–Belinskii's type theorem
15. Sufficient conditions of points of maximal stretching
16. Criterion of maximal stretching
17. Growth estimates of quasiconformal mappings
18. Conditions for Lipschitz continuity
19. Weak Lipschitz continuity
20. Regularity of boundary correspondence

21. Smoothness of quasicircles
22. Lindelöf's smoothness theorem
23. Warschawski's Conformality Theorem
24. Modulus estimates under quasiconformal mappings
25. Conformal differentiability of quasiconformal mappings
26. Weak conformality of quasiconformal mappings
27. Conformality on a set of quasiconformal mappings
28. Weak conformality on a set of quasiconformal mappings

## **12. Рекомендована література**

### **Основна література дисципліни**

1. Bojarski B., Gutlyanskii V., Martio O., Ryazanov V. Infinitesimal geometry of quasiconformal and bi-Lipschitz mappings in the plane. EMS Tracts in Mathematics, 19. European Mathematical Society, Zürich, 2013. ISBN: 978-3-03719-122-4
2. Gutlyanskii V.Ya., Ryazanov V.I. Infinitesimal geometry of spatial mappings. - К.: Akadempriodyka, 2013. ISBN 978-966-360-243-1
3. Гутлянський В.Я., Рязанов В.І. Геометрична та топологічна теорія функцій і відображень. – Київ: Наукова думка, 2011.

### **Допоміжна література дисципліни**

1. Белинский П.П. Загальні властивості квазіконформних відображень. – Н.: Наука (Сиб. від.), 1974.
2. Lehto O., Virtanen K.I. Quasiconformal mappings in the plane. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973.