

**НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ**

«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Директор ІПММ НАН України,
академік НАН України



_____ Ігор СКРИПНІК
« 25 » вересня 2025 р.

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Теорія стійкості руху нелінійних систем

**підготовки здобувачів ступеня вищої освіти
третьої (освітньо-наукової)
доктора філософії**

галузь знань 11 Математика та статистика

спеціальність 113 Прикладна математика

Черкаси – 2025 р.

Робоча навчальна програма навчальної дисципліни «Теорія стійкості руху нелінійних систем» для здобувачів наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 Прикладна математика.

Розробник:

Зуєв Олександр Леонідович, завідувач відділу прикладної математики, член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор.

Робочу програму схвалено на засіданні відділу прикладної механіки.
Протокол № 2 від 16 вересня 2025 року.

Завідувач відділу прикладної механіки



Зуєв О.Л.

Схвалено Науково-методичною радою Інституту прикладної математики і механіки НАН України.

Протокол № 4 від 22 вересня 2025 року.

Голова науково-методичної ради



Несмєлова О.В.

1. Опис навчальної дисципліни

Найменування показників	Галузь знань, напрям підготовки, освітньо-кваліфікаційний рівень	Характеристика навчальної дисципліни
Кількість кредитів - 3	Галузь знань: 11 Математика та статистика	Вибіркова
Загальна кількість годин – 120	Спеціальність: 113 Прикладна математика	Рік підготовки:
		1-2
		Семестр
		2-3
		Лекції
Тижневих годин: аудиторних – 1,5 самостійної роботи – 1,7	Освітньо-кваліфікаційний рівень: доктор філософії	28 год.
		Практичні
		28 год.
		Самостійна робота
		64 год.
		Вид контролю: іспит

2. Мета, завдання та очікувані результати навчальної дисципліни.

Метою навчальної дисципліни «Теорія стійкості руху нелінійних систем» є формування системи знань про задачі математичної теорії стійкості та методи їх дослідження. Окремою метою є висвітлення модельних проблем стійкості руху, що виникають у природничих та технічних науках.

Завдання навчальної дисципліни:

- формування основних понять теорії стійкості руху: траєкторія динамічної системи; особливі та неособливі точки систем диференціальних рівнянь; тип особливої точки за Пуанкаре; стійкість розв'язків (траєкторій) за Ляпуновим, Лагранжем, Пуассоном; стійкість по відношенню до майже всіх початкових умов; критичні випадки теорії стійкості;
- визначення типу особливої точки лінійної системи на площині;
- ознайомлення з властивостями повернення областей та точок динамічних систем;
- доведення основних теорем другого (прямого) методу Ляпунова про стійкість, асимптотичну стійкість та нестійкість тривіального розв'язку системи звичайних диференціальних рівнянь;
- встановлення умов асимптотичної стійкості та нестійкості за лінійним наближенням;
- перевірка необхідних та достатніх умов стійкості тривіального розв'язку лінійної системи зі сталими коефіцієнтами;
- дослідження стійкості особливої точки нелінійної системи диференціальних рівнянь по відношенню до майже всіх початкових умов;
- ініціювання досліджень прикладних задач теорії стійкості руху;
- здатність саморозвиватися і самовдосконалюватися при творчому дослідженні математичних проблем теорії стійкості.

Очікувані результати навчальної дисципліни

Загальні компетентності:

1. ЗК1. Аналіз і синтез. Здатність до аналізу та синтезу на основі логічних аргументів та перевірених фактів; навички управління інформацією (уміння знаходити та аналізувати інформацію з різних джерел).
2. ЗК2. Дослідницька здатність. Компетентності ініціювати та виконувати (індивідуально або в науковій групі) наукові дослідження, що приводять до отримання нових знань; здатність застосовувати знання на практиці.

3. ЗК3. Гнучкість мислення. Набуття гнучкого способу мислення, який дає можливість зрозуміти й розв'язати проблеми та задачі, зберігаючи при цьому критичне відношення до усталених наукових концепцій.
4. ЗК8. Популяризаційні навички. Вміння спілкуватися із нефахівцями; здатність провести усну презентацію та написати зрозумілу статтю за результатами проведених досліджень, а також щодо сучасних концепцій у прикладній математиці для нефахівців у цій галузі; здатність спілкуватися з експертами з інших галузей.

Фахові компетентності:

1. ФК2. Здатність застосовувати сучасну методологію, загальні та спеціальні методи наукового дослідження за спеціальністю та обраною спеціалізацією.
2. ФК5. Уміння будувати адекватні математичні моделі, досліджувати побудовані моделі та визначати можливості їх застосування.
3. ФК8. Здатність здійснювати дослідження прикладних математичних задач з використанням спеціальних математичних пакетів та аналізувати отримані дані.
4. ФК13. Поглиблені знання основних методів теорії стійкості руху та якісної теорії динамічних систем. Здатність застосовувати аналітичні та чисельні методи до розв'язання прикладних задач стійкості та стабілізації руху.

Програмні результати навчання:

1. ПРН4. Вміти будувати та досліджувати математичні моделі фізичних, соціально-економічних, технічних, біологічних тощо процесів, систем, процесів, формалізувати проблеми, описані природною мовою, за допомогою математичних методів, застосовувати загальні підходи до математичного моделювання конкретних процесів.
2. ПРН6. Вміти пояснювати складні математичні концепції мовою, зрозумілою для нефахівців у галузі математики, представляти результати наукових досліджень на наукових та популяризаційних заходах.
3. ПРН9. Вміти організувати неперервний власний саморозвиток і самовдосконалення, набуття гнучкого способу мислення при творчому дослідженні, в тому числі прикладних математичних проблем.
4. ПРН12. Знати основи теорії стійкості руху нелінійних динамічних систем та вміти застосовувати її апарат при дослідженні математичних моделей природничих і технічних наук.

За результатами вивчення навчальної дисципліни здобувач доктора філософії повинен:

знати:

- означення стійкості та нестійкості розв'язків за Ляпуновим, Лагранжем, Пуассоном;
- основні положення першого методу Ляпунова;
- формулювання основних теорем другого (прямого) методу Ляпунова;
- методологію застосування апарату теорії стійкості руху при розв'язанні прикладних задач,

уміти:

- досліджувати властивості стійкості, асимптотичної стійкості та нестійкості розв'язків систем нелінійних звичайних диференціальних рівнянь;
- застосовувати сучасні математичні програмні засоби (Matlab, Maple) для розв'язання задач теорії стійкості руху;
- аналізувати властивість стійкості руху в задачах механіки та технічних науках;
- доводити основні теореми, що входять до програми даного курсу.

3. Програма навчальної дисципліни

Тема 1. Теореми про існування, єдиність, неперервність та продовжуваність розв'язків систем звичайних диференціальних рівнянь.

Тема 2. Динамічні системи та їх властивості. Граничні множини.

Тема 3. Сімейства траєкторій, що спрямляються.

Тема 4. Геометрична класифікація особливих точок за Пуанкаре.

Тема 5. Аналітичні критерії для визначення типу особливих точок.

Тема 6. Критерій Бендіксона.

Тема 7. Стійкість за Ляпуновим. Основи першого методу Ляпунова.

Тема 8. Теореми другого методу Ляпунова про стійкість та асимптотичну стійкість.

Тема 9. Теорема Барбашина–Красовського та принцип інваріантності ЛаСалля.

Тема 10. Теореми другого методу Ляпунова про нестійкість.

Тема 11. Стійкість за лінійним наближенням. Критичні випадки теорії стійкості.

Тема 12. Теорія ступеня відображення та необхідні умови асимптотичної стійкості. Індекс особливої точки.

Тема 13. Системи з інтегральними інваріантами.

Тема 14. Повернення областей відносно траєкторій динамічних систем. Теорема Пуанкаре.

Тема 15. Ергодичні теореми Біркгофа. Теореми Рантцера.

4. Структура навчальної дисципліни

Назва теми	Кількість годин			
	Усього	у тому числі		
		Лекції	Практичні заняття	Самостійна робота
1	2	3	4	5
Тема 1. Теореми про існування, неперервність та продовжуваність розв'язків систем звичайних диференціальних рівнянь.	8	2	2	4
Тема 2. Динамічні системи та їх властивості. Граничні множини.	12	3	3	6
Тема 3. Сімейства траєкторій, що спрямляються.	8	2	2	4

Тема 4. Геометрична класифікація особливих точок за Пуанкаре.	8	2	2	4
Тема 5. Аналітичні критерії для визначення типу особливих точок.	6	1	1	4
Тема 6. Критерій Бендіксона.	10	2	2	6
Тема 7. Стійкість за Ляпуновим. Основи першого методу Ляпунова.	8	2	2	4
Тема 8. Теореми другого методу Ляпунова про стійкість та асимптотичну стійкість.	6	2	2	2
Тема 9. Теорема Барбашина-Красовського та принцип інваріантності ЛаСалля.	8	2	2	4
Тема 10. Теореми другого методу Ляпунова про нестійкість.	8	2	2	4
Тема 11. Стійкість за лінійним наближенням. Критичні випадки теорії стійкості.	6	1	1	4
Тема 12. Теорія ступеня відображення та необхідні умови асимптотичної стійкості. Індекс особливої точки.	6	1	1	4
Тема 13. Системи з інтегральними інваріантами.	10	2	2	6
Тема 14. Повернення областей відносно траєкторій динамічних систем. Теорема Пуанкаре.	8	2	2	4
Тема 15. Ергодичні теореми Біркгофа. Теореми Рантцера.	8	2	2	4
Усього годин	120	28	28	64

5. Теми практичних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Тема 1. Теореми про існування, єдиність, неперервність та продовжуваність розв'язків систем звичайних диференціальних рівнянь.	2
2	Тема 2. Динамічні системи та їх властивості. Граничні множини.	3

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
3	Тема 3. Сімейства траєкторій, що спрямляються.	2
4	Тема 4. Геометрична класифікація особливих точок за Пуанкаре.	2
5	Тема 5. Аналітичні критерії для визначення типу особливих точок.	1
6	Тема 6. Критерій Бендіксона.	2
7	Тема 7. Стійкість за Ляпуновим. Основи першого методу Ляпунова.	2
8	Тема 8. Теореми другого методу Ляпунова про стійкість та асимптотичну стійкість.	2
9	Тема 9. Теорема Барбашина-Красовського та принцип інваріантності ЛаСалля.	2
10	Тема 10. Теореми другого методу Ляпунова про нестійкість.	2
11	Тема 11. Стійкість за лінійним наближенням. Критичні випадки теорії стійкості.	1
12	Тема 12. Теорія ступеня відображення та необхідні умови асимптотичної стійкості. Індекс особливої точки.	1
13	Тема 13. Системи з інтегральними інваріантами.	2
14	Тема 14. Повернення областей відносно траєкторій динамічних систем. Теорема Пуанкаре.	2
15	Тема 15. Ергодичні теореми Біркгофа. Теореми Рантацера.	2
	Разом	28

6. Теми для самостійної роботи

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Тема 1. Теореми про існування, єдиність, неперервність та продовжуваність розв'язків систем звичайних диференціальних рівнянь.	4
2	Тема 2. Динамічні системи та їх властивості. Граничні множини.	6
3	Тема 3. Сімейства траєкторій, що спрямляються.	4
4	Тема 4. Геометрична класифікація особливих точок за Пуанкаре.	4
5	Тема 5. Аналітичні критерії для визначення типу особливих точок.	4
6	Тема 6. Критерій Бендіксона.	6
7	Тема 7. Стійкість за Ляпуновим. Основи першого методу Ляпунова.	4

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
8	Тема 8. Теореми другого методу Ляпунова про стійкість та асимптотичну стійкість.	2
9	Тема 9. Теорема Барбашина-Красовського та принцип інваріантності ЛаСалля.	4
10	Тема 10. Теореми другого методу Ляпунова про нестійкість.	4
11	Тема 11. Стійкість за лінійним наближенням. Критичні випадки теорії стійкості.	4
12	Тема 12. Теорія ступеня відображення та необхідні умови асимптотичної стійкості. Індекс особливої точки.	4
13	Тема 13. Системи з інтегральними інваріантами.	6
14	Тема 14. Повернення областей відносно траєкторій динамічних систем. Теорема Пуанкаре.	4
15	Тема 15. Ергодичні теореми Біркгофа. Теореми Рантцера.	4
	Разом	64

7. Методи навчання

При викладанні навчальної дисципліни «Теорія стійкості руху нелінійних систем» використовуються такі методи навчання: метод проблемного навчання, евристичне навчання, модульно-рейтингова система навчання.

8. Методи контролю

Використовуються наступні методи контролю:

1. Поточний контроль знань:
 - усне опитування;
 - виконання практичних робіт;
 - тестування;
 - виконання дослідницьких завдань.
2. Підсумковий контроль знань (іспит):
 - підсумковий тест або екзаменаційні білети.

9. Критерії оцінювання результатів навчання

Розподіл балів, які отримує аспірант

Аудиторна робота															Самостійна робота	Підсумковий контроль (іспит)	Загальна кількість отриманих балів	
теми																		
T1	T2	T3	T4	T5	T5	T6	T7	T8	T9	T10	T11	T12	T13	T14				T15
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	15	40	100

Шкала оцінювання

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка за національною шкалою
	для іспиту
90-100	«відмінно» - здобувач повно і всебічно розкриває питання теми, вільно оперує поняттями і термінологією, демонструє глибокі знання джерел, має власну точку зору стосовно відповідної теми і може аргументовано її доводити
75-89	«добре» - загалом рівень знань здобувачів відповідає викладеному вище, але мають місце деякі упущення при виконанні завдань, обґрунтування неточні, не підтверджуються достатньо обґрунтованими доказами
60-74	«задовільно» - здобувач розкрив питання, в загальних рисах, розуміє їх суть, намагається робити висновки, але при цьому припускається грубих помилок, матеріал викладає нелогічно і не самостійно
35-59	«незадовільно» - з можливістю повторного складання, здобувач не в змозі дати відповідь на поставлене запитання або відповідь неправильна, не розуміє суті питання, не може зробити висновки
0-34	«незадовільно» - з обов'язковим повторним вивченням дисципліни

10. Орієнтовний перелік питань до підсумкового контролю (іспиту)

1. Теореми про існування, єдиність, неперервність та продовжуваність розв'язків систем звичайних диференціальних рівнянь.
2. Сімейства траєкторій, що спрямляються.
3. Геометрична класифікація особливих точок за Пуанкаре.
4. Аналітичні критерії для визначення типу особливих точок.
5. Критерій Бендіксона.

6. Теорема Ляпунова про стійкість.
7. Теорема Ляпунова про асимптотичну стійкість.
8. Теорема Барбашина–Красовського та принцип інваріантності ЛаСалля.
9. Теореми Ляпунова про нестійкість.
10. Теорема Четаєва про нестійкість.
11. Стійкість за лінійним наближенням. Критичні випадки теорії стійкості.
12. Умови Рауса–Гурвиця.
13. Необхідні умови асимптотичної стійкості в термінах індексу особливої точки.
14. Теореми Пуанкаре про повернення.
15. Ергодичні теореми Біркгофа.
16. Теорема Рантцера.

11. Рекомендована література

Основна література дисципліни

1. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
2. Chicone C. Ordinary Differential Equations with Applications. - Springer, 2024. - 729 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-51652-8>
3. Mironchenko A. Input-to-State Stability. Theory and Applications. – Springer, 2023. – 406 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-14674-9>
4. Андреев А.Ф. Введение в локальную качественную теорию дифференциальных уравнений. – СПб.: Изд-во С.- Петерб. Университета, 2003. – 160 с.
5. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова.– М.: Наука, 1970. – 240 с.
6. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. – 2-е изд. – М.: Наука, 1990. – 488 с.
7. Красносельский М.А, Забрёйко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа. – М.: Наука, 1975. – 512 с.
8. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. – М.: Физматгиз, 1959. – 212 с.
9. Ла-Салль Ж., Лефшец С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. – М.: Мир, 1964. – 186 с.

10. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966. – 532 с.
11. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. – М.-Л.: Гостехиздат, 1949. – 550 с.
12. Рейсиг Р., Сансоне Г., Конти Р. Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1974. – 320 с.
13. Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. – М.: Мир, 1980. – 300 с.

Допоміжна література дисципліни

1. Arteaga M. A., Gutiérrez-Giles A., Pliego-Jiménez J. Local stability and ultimate boundedness in the control of robot manipulators. – Springer, 2022. – 374 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-85980-0>
2. Rajchakit G., Agarwal P., Ramalingam S. Stability analysis of neural networks. – Springer, 2021. – 404 p. <https://doi.org/10.1007/978-981-16-6534-9>
3. Биркгоф Дж. Динамические системы. – М.-Л.: Гостехиздат, 1941. – 320 с.
4. Зуев А.Л., Буряченко Е.А. Качественная теория дифференциальных уравнений: тексты лекций специального курса по дифференциальным уравнениям и уравнениям математической физики. – Донецк: ДонНУ, 2007. – 50 с.
5. Коддингтон Е.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: ИЛ, 1958. – 474 с.
6. Rantzer A. A dual to Lyapunov's stability theorem // Systems & Control Letters. – 2001. - Vol. 42. – P. 161–168.