

**НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ  
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ**

**«ЗАТВЕРДЖУЮ»**

Директор ІПММ НАН України  
академік НАН України

Ігор СКРИПНІК

« 25 » вересня 2025 р.



**РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ**

**«BELTRAMI EQUATION: GEOMETRIC APPROACH»**

**підготовки здобувачів ступеня вищої освіти**

**третій (освітньо-науковий)**

**доктора філософії**

**галузь знань 11 Математика та статистика**

**спеціальність 111 Математика**

Черкаси – 2025 р.

Робоча навчальна програма навчальної дисципліни «Beltrami Equation: Geometric Approach» для здобувачів наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 Математика

Розробник:

Гутлянський Володимир Якович , радник при дирекції, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., професор ІПММ НАН України;

Рязанов Володимир Ілліч, завідувач відділом теорії функцій, д.ф.-м.н., професор ІПММ НАН України

Робочу програму схвалено на засіданні відділу теорії функцій  
Протокол № 3 від 17.09.2025 року.

Завідувач відділу



В.І. Рязанов

Схвалено Науково-методичною радою Інституту прикладної математики і механіки НАН України

Протокол № 4 від 22.09.2025 року.

Голова науково-методичної ради



Несмєлова О.В.

### 1. Опис навчальної дисципліни

| Найменування показників                                         | Галузь знань, напрям підготовки, освітньо-кваліфікаційний рівень | Характеристика навчальної дисципліни |
|-----------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|--------------------------------------|
| Кількість кредитів -4                                           | Галузь знань:<br>11 Математика та статистика                     | Вибіркова                            |
| Загальна кількість годин – 120                                  | Спеціальність:<br>111 Математика                                 | Рік підготовки:                      |
|                                                                 |                                                                  | 1-2                                  |
|                                                                 |                                                                  | Семестр                              |
|                                                                 |                                                                  | 2-3                                  |
| Тижневих годин:<br>аудиторних – 1,5<br>самостійної роботи – 1,7 | Освітньо-кваліфікаційний рівень:<br>доктор філософії             | Лекції                               |
|                                                                 |                                                                  | 28год                                |
|                                                                 |                                                                  | Практичні                            |
|                                                                 |                                                                  | 28 год                               |
|                                                                 |                                                                  | Самостійна робота                    |
|                                                                 |                                                                  | 64 год                               |
|                                                                 |                                                                  | Вид контролю: іспит                  |

## **1. Мета, завдання та очікувані результати навчальної дисципліни.**

**Метою** навчальної дисципліни навчальної дисципліни «Beltrami Equation: Geometric Approach» є поглиблене вивчення теорії рівнянь Бельтрамі в випадку виродження умови рівномірної еліптичності.

**Завдання** навчальної дисципліни: вивчення теорем існування регулярних гомеоморфних розв'язків рівнянь Бельтрамі з виродженням умови рівномірної еліптичності, а також теорем існування регулярних (неперервних, відкритих і дискретних) розв'язків задачі Дирихле для таких рівнянь.

### **Очікувані результати навчальної дисципліни**

#### **Загальні компетентності:**

1. Аналіз і синтез. Здатність до аналізу та синтезу на основі логічних аргументів та перевірених фактів; навички управління інформацією (уміння знаходити та аналізувати інформацію з різних джерел) (ЗК 1).

2. Дослідницька здатність. Компетентності ініціювати та виконувати (індивідуально або в науковій групі) наукові дослідження, що приводять до отримання нових знань; здатність застосовувати знання на практиці. (ЗК 2).

3. Гнучкість мислення. Набуття гнучкого способу мислення, який дає можливість зрозуміти й розв'язати проблеми та задачі, зберігаючи при цьому критичне відношення до усталених наукових концепцій (ЗК 3).

4. Комунікативні навички. Здатність ефективно спілкуватися із спеціальною та загальною аудиторіями, а також представляти складну інформацію у зручний та зрозумілий спосіб усно і письмово, використовуючи відповідну технічну лексику та методи; навички використання інформаційних і комунікаційних технологій; здатність спілкуватися рідною та другою іноземною мовою як усно, так і письмово (ЗК 6).

5. Міжнародний кругозір. Здатність працювати в міжнародному середовищі, ставитися із повагою до національних та культурних традицій, способів роботи інших членів групи (ЗК 7).

6. Популяризаційні навички. Вміння спілкуватися із нефахівцями; здатність провести усну презентацію та написати зрозумілу статтю за результатами проведених досліджень, а також щодо сучасних концепцій у математиці для нефахівців у цій галузі (ЗК 8).

7. Етичні установки. Етика поведінки в наукових дослідженнях; турбота про якість результату (ЗК 11).

Особисті якості. Здатність до навчання, саморозвитку та самовдосконалення протягом життя; визначеність і наполегливість щодо поставлених завдань і взятих обов'язків (ЗК 12).

### **Фахові компетентності:**

1. Знання історії розвитку та сучасного стану наукових знань за спеціальністю та обраною спеціалізацією (ФК 1).
2. Здатність застосовувати сучасну методологію, загальні та спеціальні методи наукового дослідження за спеціальністю та обраною спеціалізацією (ФК 2).
3. Здатність логічно мислити, формулювати, строго доводити та перевіряти правильність математичних тверджень (ФК 4).
4. Оволодіння традиційними та сучасними математичними методами дослідження та застосуваннями рівняння Бельтрамі (ФК 10).

### **Програмні результати навчання:**

1. Знати та розуміти традиційні та передові тенденції в галузі математики, етапи історичного розвитку математичних знань і парадигм, формування поглибленої системи наукових знань за напрямом досліджень (ПРН 1).
2. Знати основні принципи, форми та методи проведення наукових досліджень в галузі математики, володіти математичним апаратом в об'ємі, достатньому для професійної діяльності (ПРН 3).
3. Вміти за допомогою теоретичного математичного апарату досліджувати різноманітні природні явища та процеси, проводити аналіз впливу на них різних факторів, а також вивчати взаємодію між явищами з метою отримання переконливо доведених і корисних фундаментальних та практичних результатів (ПРН 5).
4. Здійснювати професійну письмову й усну комунікацію українською та іноземними мовами. Уміти працювати зі спеціальною літературою та наукометричними базами даних, в тому числі іноземною мовою (ПРН 8).
5. Вміти організувати неперервний власний саморозвиток і самовдосконалення, набуття гнучкого способу мислення при творчому дослідженні, в тому числі прикладних математичних проблем (ПРН 10).
6. Вміти формулювати наукові проблеми з огляду на цінні стін орієнтири сучасного суспільства та стану її поточного дослідження (ПРН 11).
7. Розв'язувати фундаментальні та прикладні задачі придатними математичними методами, перевіряти умови виконання математичних тверджень, коректно переносити умови та твердження на нові класи об'єктів, знаходити й аналізувати відповідності між поставленою задачею й відомими моделями, будувати та досліджувати нові математичні моделі (ПРН 12).
8. Знати теоретичні основи і застосовувати спеціальні методи дослідження в теорії функцій комплексного змінного та теорії квазіконформних відображень (ПРН 13).

За результатами вивчення навчальної дисципліни здобувач доктора філософії повинен:

#### **знати:**

- теореми існування регулярних гомеоморфних розв'язків для вироджених рівнянь Бельтрамі з однією характеристикою;

- теореми існування регулярних гомеоморфних розв'язків для вироджених рівнянь Бельтрамі з двома характеристиками;
- теореми існування регулярних розв'язків задачі Дирихле для вироджених рівнянь Бельтрамі.

**вміти:**

- уміти використовувати метод модулів сімейств кривих в теорії вироджених рівнянь Бельтрамі для оцінки рівностепеневі неперервності їх розв'язків.
- вміти використовувати теорію збіжності рішень вироджених рівнянь Бельтрамі для доказу теорем існування їх гомеоморфних розв'язків.
- уміти доводити теореми збіжності розв'язків для вироджених рівнянь Бельтрамі.

## 2. Програма навчальної дисципліни

**Тема 1.** Introduction to Beltrami equations: definitions, history, applications

---

**Тема 2.** Classical case: existence, uniqueness, smoothness of solutions

---

**Тема 3.** Degenerate case: classification of singular sets, Bers and Lehto criteria

---

**Тема 4.** Criteria of Pesin, Brakalova-Jenkins and Iwaniec-Martin

---

**Тема 5.** Criteria of Miklyukov-Suvorov, David and Tukia

---

**Тема 6.** Criteria of Gutlyanskii-Martio-Sugawa-Vuorinen

---

**Тема 7.** BMO-criterion for the existence of regular homeomorphic solutions

---

**Тема 8.** Properties of BMO-quasiconformal and BMO-quasiregular mappings

---

**Тема 9.** FMO-criterion for the existence of regular homeomorphic solutions

---

**Тема 10.** Existence criteria for Beltrami equations with 2 characteristics

---

**Тема 11.** Consequences for the reduced Beltrami equations

---

**Тема 12.** Criteria for the existence of strong ring solutions

---

**Тема 13.** Representation, factorization and uniqueness theorems

---

**Тема 14.** Criteria for the existence of regular solutions to the Dirichlet problem

---

### 3. Структура навчальної дисципліни

| Назва теми                                                                        | Кількість годин |              |                   |                   |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------|--------------|-------------------|-------------------|
|                                                                                   | Усього          | у тому числі |                   |                   |
|                                                                                   |                 | Лекції       | Практичні заняття | Самостійна робота |
| 1                                                                                 | 2               | 3            | 4                 | 5                 |
| Тема 1. Introduction to Beltrami equations: definitions, history, applications    | 8               | 2            | 2                 | 4                 |
| Тема 2. Classical case: existence, uniqueness, smoothness of solutions            | 8               | 2            | 2                 | 4                 |
| Тема 3. Degenerate case: classification of singular sets, Bers and Lehto criteria | 10              | 2            | 2                 | 6                 |
| Тема 4. Criteria of Pesin, Brakalova-Jenkins and Iwaniec-Martin                   | 8               | 2            | 2                 | 4                 |
| Тема 5. Criteria of Miklyukov-Suvorov, David and Tukia                            | 8               | 2            | 2                 | 4                 |
| Тема 6. Criteria of Gutlyanskii-Martio-Sugawa-Vuorinen                            | 8               | 2            | 2                 | 4                 |
| Тема 7. BMO-criterion for the existence of regular homeomorphic solutions         | 8               | 2            | 2                 | 4                 |
| Тема 8. Properties of BMO-quasiconformal and BMO-quasiregular mappings            | 10              | 2            | 2                 | 6                 |
| Тема 9. FMO-criterion for the existence of regular homeomorphic solutions         | 8               | 2            | 2                 | 4                 |
| Тема 10. Existence criteria for Beltrami equations with 2 characteristics         | 8               | 2            | 2                 | 4                 |
| Тема 11. Consequences for the reduced Beltrami equations                          | 10              | 2            | 2                 | 6                 |
| Тема 12. Criteria for the existence of strong ring solutions                      | 8               | 2            | 2                 | 4                 |
| Тема 13. Representation, factorization and uniqueness theorems                    | 10              | 2            | 2                 | 6                 |
| Тема 14. Criteria for the existence of regular solutions to the Dirichlet problem | 8               | 2            | 2                 | 4                 |
| <b>Усього годин</b>                                                               | <b>120</b>      | <b>28</b>    | <b>28</b>         | <b>64</b>         |



#### 4. Теми практичних занять

| № з/п | Назва теми                                                      | Кількість годин |
|-------|-----------------------------------------------------------------|-----------------|
| 1     | Definitions and properties of BMO and FMO functions             | 2               |
| 2     | The main lemmas on BMO and FMO functions                        | 2               |
| 3     | Modulus and capacity: definitions, properties, interconnections | 2               |
| 4     | The Sobolev classes and relevant ACL homeomorphisms             | 2               |
| 5     | Convergence theorems for homeomorphisms                         | 2               |
| 6     | On a series of equivalent integral conditions                   | 2               |
| 7     | Interconnection with one more integral condition                | 2               |
| 8     | Ring $Q$ -homeomorphisms at inner points                        | 2               |
| 9     | Ring $Q$ -homeomorphisms at boundary points                     | 2               |
| 10    | The completeness of ring homeomorphisms                         | 2               |
| 11    | On weakly flat and strongly accessible boundaries               | 2               |
| 12    | Extending inverse mappings to the boundary                      | 2               |
| 13    | Extending direct mappings to the boundary                       | 2               |
| 14    | Removability of isolated singularities                          | 2               |
|       | <b>Разом</b>                                                    | <b>28</b>       |

#### 5. Теми для самостійної роботи

| № з/п | Назва теми                                                      | Кількість годин |
|-------|-----------------------------------------------------------------|-----------------|
| 1     | Definitions and properties of BMO and FMO functions             | 4               |
| 2     | The main lemmas on BMO and FMO functions                        | 4               |
| 3     | Modulus and capacity: definitions, properties, interconnections | 6               |
| 4     | The Sobolev classes and relevant ACL homeomorphisms             | 4               |
| 5     | Convergence theorems for homeomorphisms                         | 4               |
| 6     | On a series of equivalent integral conditions                   | 4               |
| 7     | Interconnection with one more integral condition                | 4               |
| 8     | Ring $Q$ -homeomorphisms at inner points                        | 6               |
| 9     | Ring $Q$ -homeomorphisms at boundary points                     | 4               |
| 10    | The completeness of ring homeomorphisms                         | 4               |
| 11    | On weakly flat and strongly accessible boundaries               | 6               |
| 12    | Extending inverse mappings to the boundary                      | 4               |
| 13    | Extending direct mappings to the boundary                       | 6               |
| 14    | Removability of isolated singularities                          | 4               |
|       | <b>Разом</b>                                                    | <b>64</b>       |

## 6. Методи навчання

При викладанні навчальної дисципліни «Beltrami Equation: Geometric Approach» використовуються такі методи навчання: проблемно-пошуковий, пояснювально-ілюстративний, дослідницький, пошуковий, тощо. Освітній процес побудований на принципах особистісно орієнтованого навчання, на основі компетентнісного, системного, підходів що складає: проблемно-орієнтоване навчання; індивідуальні консультації фахівців Інституту прикладної математики і механіки НАН України, інших установ НАН України.

## 8. Методи контролю

**Використовуються наступні методи контролю:**

1. Поточний контроль знань:
  - усне опитування;
  - виконання практичних робіт;
  - тестування;
  - виконання дослідницьких завдань.
2. Підсумковий контроль знань (іспит):
  - підсумковий тест або екзаменаційні білети.

## 9. Критерії оцінювання результатів навчання

**Розподіл балів, які отримує аспірант**

| Аудиторна робота |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     | Самостійна<br>робота | Підсумковий<br>контроль | Загальна кількість<br>отриманих балів |
|------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|----------------------|-------------------------|---------------------------------------|
| теми             |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |                      |                         |                                       |
| T1               | T2 | T3 | T4 | T5 | T6 | T7 | T8 | T9 | T10 | T11 | T12 | T13 | T14 |                      |                         |                                       |
| 3                | 3  | 3  | 3  | 3  | 3  | 3  | 5  | 3  | 3   | 5   | 3   | 5   | 5   | 10                   | 40                      | 100                                   |

### Шкала оцінювання

| Сума балів за всі види навчальної діяльності | Оцінка за національною шкалою                                                                                                                                                                                              |
|----------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                              | для іспиту                                                                                                                                                                                                                 |
| <b>90-100</b>                                | «відмінно» - здобувач повно і всебічно розкриває питання теми, вільно оперує поняттями і термінологією, демонструє глибокі знання джерел, має власну точку зору стосовно відповідної теми і може аргументовано її доводити |
| <b>75-89</b>                                 | «добре» - загалом рівень знань здобувачів відповідає викладеному вище, але мають місце деякі упущення при виконанні завдань, обґрунтування неточні, не підтверджуються достатньо обґрунтованими доказами                   |
| <b>60-74</b>                                 | «задовільно» - здобувач розкрив питання, в загальних рисах, розуміє їх суть, намагається робити висновки, але при цьому припускається грубих помилок, матеріал викладає нелогічно і не самостійно                          |
| <b>35-59</b>                                 | «незадовільно» - з можливістю повторного складання, здобувач не в змозі дати відповідь на поставлене запитання або відповідь неправильна, не розуміє суті питання, не може зробити висновки                                |
| <b>0-34</b>                                  | «незадовільно» - з обов'язковим повторним вивченням дисципліни                                                                                                                                                             |

### 10. Орієнтовний перелік питань до підсумкового контролю (іспиту)

1. Introduction to Beltrami equations: definitions, history, applications
2. Classical case: existence, uniqueness, smoothness of solutions
3. Degenerate case: classification of singular sets, Bers and Lehto criteria
4. Criteria of Pesin, Brakalova-Jenkins and Iwaniec-Martin
5. Criteria of Miklyukov-Suvorov, David and Tukia
6. Criteria of Gutlyanskii-Martio-Sugawa-Vuorinen
7. BMO-criterion for the existence of regular homeomorphic solutions
8. Properties of BMO-quasiconformal and BMO-quasiregular mappings
9. FMO-criterion for the existence of regular homeomorphic solutions
10. Existence criteria for Beltrami equations with 2 characteristics
11. Consequences for the reduced Beltrami equations
12. Criteria for the existence of strong ring solutions
13. Representation, factorization and uniqueness theorems
14. Criteria for the existence of regular solutions to the Dirichlet problem
15. Definitions and properties of BMO and FMO functions
16. The main lemmas on BMO and FMO functions
17. Modulus and capacity: definitions, properties, interconnections
18. The Sobolev classes and relevant ACL homeomorphisms
19. Convergence theorems for homeomorphisms
20. On a series of equivalent integral conditions
21. Interconnection with one more integral condition

- 22. Ring  $Q$ -homeomorphisms at inner points
- 23. Ring  $Q$ -homeomorphisms at boundary points
- 24. The completeness of ring homeomorphisms
- 25. On weakly flat and strongly accessible boundaries
- 26. Extending inverse mappings to the boundary
- 27. Extending direct mappings to the boundary
- 28. Removability of isolated singularities

## 12. Рекомендована література

### Основна література дисципліни

1. V. Gutlyanskii, V. Ryazanov, E. Yakubov and A. Yefimushkin. On Hilbert boundary value problem for Beltrami equation // *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* – 2020. -- 45, no. 2. – P. 957-973. <https://doi.org/10.5186/aasfm.2020.4552>
2. V. Gutlyanskii, V. Ryazanov, E. Yakubov, A. Yefimushkin, On the Hilbert boundary-value problem for Beltrami equations with singularities // *Ukr. Mat. Vis.* – 2020. – V. 17, № 4. – P. 484–508; transl. in *J. Math. Sci. (N.Y.)*. - 2021. – V. 254, no. 3. – P. 357–374.
3. V. Gutlyanskii, O. Nesmelova, V. Ryazanov, A. Yefimushkin, Logarithmic potential and generalized analytic functions // *Ukr. Mat. Vis.* – 2021. – V. 18, № 1. – P. 12–35; transl. in *J. Math. Sci. (N.Y.)*. - 2021. – V. 256, no. 6. – P. 9–26.
4. V. Gutlyanskii, V. Ryazanov, E. Sevost'yanov, E. Yakubov. On the degenerate Beltrami equation and hydrodynamic normalization // *Ukr. Mat. Vis.* – 2022. – V. 19, № 1. – P. 49–74; transl. in *J. Math. Sci. (N.Y.)*. - 2022. – V. 262, no. 2. – P. 165–183. [doi.org/10.1007/s10958-022-05808-w](https://doi.org/10.1007/s10958-022-05808-w)
5. V. Gutlyanskii, V. Ryazanov, E. Sevost'yanov, E. Yakubov. BMO and Dirichlet problem for degenerate Beltrami equation // *Ukr. Mat. Vis.* – 2022. – V. 19, № 3. – P. 327–354; transl. in *J. Math. Sci. (N.Y.)*. - 2022. – V. 268, no. 2. – P. 157–177. [doi.org/10.1007/s10958-022-06189-w](https://doi.org/10.1007/s10958-022-06189-w)
6. V. Gutlyanskii, O. Nesmelova, , V. Ryazanov,. E., Yakubov. On the Hilbert problem for semi-linear Beltrami equations // *Ukr. Mat. Vis.* – 2022. – V. 19, № 4. – P. 489-516; transl. in *J. Math. Sci. (N.Y.)*. - 2023. – V. 270, no. 3. – P. 428–448. DOI 10.1007/s10958-023-06356-7
7. V. Gutlyanskii, O. Nesmelova, , V. Ryazanov,. E., Yakubov. The Dirichlet problem for the Beltrami equations with sources // *Ukr. Mat. Vis.* – 2023. – V. 20, № 1. – P. 24-59; transl. in *J. Math. Sci. (N.Y.)*. – 2023 - 273, no. 3, 351-376. DOI: 10.1007/s10-0958-023-06503
8. Gutlyanskii, V., Ryazanov, V., Nesmelova O., Yakubov, E. Toward the theory of semi-linear Beltrami equations. // *Constructive Mathematical Analysis* 6 (2023), no. 3, 151-163. DOI: 10.33205/cma.1248692

### Допоміжна література дисципліни

1. Ahlfors L.V. Lectures on quasiconformal mappings. Van Nostrand Math. Stud., No. 10 D. Van Nostrand Co., Inc., Toronto, Ont.-New York-London, 1966.

2. Astala K., Iwaniec T., Martin G. Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in the plane. Princeton Mathematical Series, 48. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009. ISBN 978-0-691-13777-3
3. Bojarski B., Gutlyanskii V., Martio O., Ryazanov V. Infinitesimal geometry of quasiconformal and bi-Lipschitz mappings in the plane. EMS Tracts in Mathematics, 19. European Mathematical Society, Zürich, 2013. ISBN: 978-3-03719-122-4
4. Iwaniec T., Martin G. Geometric function theory and non-linear analysis. Oxford Mathematical Monographs. *The Clarendon Press, Oxford University Press, New York*, 2001. ISBN: 0-19-850929-4
5. Lehto O., Virtanen K.I. Quasiconformal mappings in the plane. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973.
6. Renelt H. Elliptic systems and quasiconformal mappings. Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1988. ISBN: 0-471-91731-1