

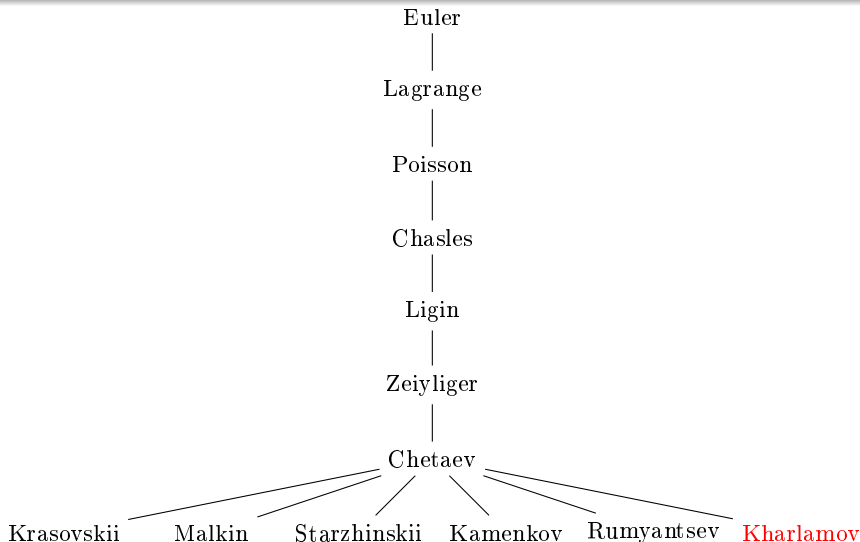
Про науковий внесок Павла Васильовича Харламова в математику та механіку

Олександр Зуєв

Ювілейна сесія Загальних зборів Відділення математики НАН України

25 червня 2024 року

Mathematics Genealogy Project



<https://genealogy.math.ndsu.nodak.edu/id.php?id=199951>



Павло Васильович
Харламов
(1924 – 2001)

- динаміка твердого тіла
- метод годографів
- динамічні рівняння відносно спеціальних координатних осей
- метод інваріантних співвідношень
- аналітичні розв'язки задачі про рух твердого тіла в рідині
- аналітичні розв'язки задачі про кручення та вигин тонких стержнів на основі аналогії Кірхгофа–Жуковського
- математичне моделювання руху тіла на струнному підвісі
- методологічні засади механіки

Гіроскоп: тверде тіло з нерухомою точкою



Тверде тіло з нерухомою точкою

Рівняння Ейлера–Пуассона

$$A\dot{\omega} = A\omega \times \omega + s(\mathbf{e} \times \nu), \quad \dot{\nu} = \nu \times \omega,$$

A - тензор інерції тіла у нерухомій точці,

ω - вектор кутової швидкості тіла,

ν - одиничний вектор вертикалі,

$\mathbf{e}$ - одиничний вектор, спрямований з нерухомої точки до центру мас тіла, $s = mgr_C$.

L. Euler (1750): Découverte d'un nouveau principe de mécanique
// Mémoires de l'Académie des sciences de Berlin, 6, P. 185-217.

Алгебраїчні інтеграли системи Ейлера–Пуассона

$$\mathcal{H} \equiv \frac{1}{2}(A\omega, \omega) - s(\mathbf{e}, \nu) = h,$$

$$\mathcal{G} \equiv (A\omega, \nu) = g,$$

$$\mathcal{I} \equiv (\nu, \nu) = 1.$$

Останній множник Якобі

Нехай для системи диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f \in C^1(\mathbb{R}^n), \quad n \geq 3, \quad (*)$$

існує функція $\rho \in C^1(\mathbb{R}^n)$, для якої

$$\operatorname{div}(\rho(x)f(x)) \equiv 0.$$

Якщо система $(*)$ в околі неособливої точки x^* має $n - 2$ функціонально незалежних перших інтегралів класу C^1 , то система $(*)$ є інтегровною в квадратурах.

C.G.J. Jacobi (1844): Theoria novi multiplicatoris systemati aequationum differentialium vulgarium applicandi // Journal für die reine und angewandte Mathematik, 27, P. 199-268.

Алгебраїчні інтеграли рівнянь Ейлера–Пуассона

С.В. Ковалевська: рівняння Ейлера–Пуассона з комплексним часом **у загальному випадку** не мають однозначних розв'язків, що допускають 5 довільних сталих і не мають інших особливих точок, крім полюсів.

Окремі випадки

- ❶ $A_1 = A_2 = A_3$;
- ❷ $e_1 = e_2 = e_3 = 0$ (випадок Ейлера);
- ❸ $A_1 = A_2, e_1 = e_2 = 0$ (випадок Лагранжа);
- ❹ $A_1 = A_2 = 2A_3, e_2 = e_3 = 0$ (випадок Ковалевської).

Девіз роботи Ковалевської: "кажи, що знаєш; роби, що маєш; буде чому бути".

Премія Паризької академії наук (1888): 5000 франків.

Новий випадок інтегровності рівнянь руху твердого тіла

Доклады АН СССР, 1969, Т. 188 (4)

$$\begin{aligned}A \, dp / dt &= (B - C)qr + \lambda_2 r, \\B \, dq / dt &= (C - A)rp - \lambda_1 r + \Gamma v_1, \\C \, dr / dt &= (A - B)pq + \lambda_1 q - \lambda_2 p + \Gamma v_2, \\dv_1 / dt &= rv_2 - qv_3, \quad dv_2 / dt = pv_3 - pv_1, \quad dv_3 / dt = qv_1 - pv_2.\end{aligned}\tag{1}$$

Розв'язок у квадратурах, $A = 18C(B - C)(10B - 9C)$

$$\begin{aligned}p &= -u \frac{B - C}{ABC} \left(\frac{1}{B} \frac{5B - 3C}{10B - 9C} n \cos \varepsilon + 2 \cos \sigma \right), \\q &= \frac{u}{3BC} \left(\frac{B - C}{BC} n \sin \varepsilon - 2 \sin \sigma \right), \\r &= \frac{u}{C} (r_0 + r_1 \cos \sigma + r_1' \sin \sigma + r_2 \cos 2\sigma + r_3 \cos 3\sigma + r_3' \sin 3\sigma)^{1/2}, \\v_1 &= -\frac{u^2}{\Gamma} \frac{2B - 3C}{36BC^2} (\kappa_0' + \kappa_1 \cos \sigma + \kappa_1' \sin \sigma + \kappa_2 \cos 2\sigma + \kappa_3 \cos 3\sigma + \kappa_3' \sin 3\sigma), \\v_2 &= -\frac{u^2}{\Gamma} \frac{2B - 3C}{36BC^2} (\chi_0 + \chi_1 \cos \sigma + \chi_1' \sin \sigma + \chi_2' \sin 2\sigma + \chi_3 \cos 3\sigma + \chi_3' \sin 3\sigma),\end{aligned}$$

Новий випадок інтегровності рівнянь руху тверого тіла

Доклади АН ССРСР, 1969, Т. 188 (4)

$$\begin{aligned}A \, dp / dt &= (B - C)qr + \lambda_2 r, \\B \, dq / dt &= (C - A)rp - \lambda_1 r + \Gamma v_1, \\C \, dr / dt &= (A - B)pq + \lambda_1 q - \lambda_2 p + \Gamma v_2, \\dv_1 / dt &= rv_2 - qv_3, \quad dv_2 / dt = pv_3 - pv_1, \quad dv_3 / dt = qv_1 - pv_2.\end{aligned}\tag{1}$$

Розв'язок у квадратурах, $A = 18C(B - C)(10B - 9C)$

$$\begin{aligned}t - t_0 &= \frac{3(B - C)}{uB} \int_0^\sigma (r_0 + r_1 \cos \sigma + r_1' \sin \sigma + r_2 \cos 2\sigma + \\&\quad + r_3 \cos 3\sigma + r_3' \sin 3\sigma)^{-1/2} d\sigma\end{aligned}$$

Розв'язання рівнянь Ейлера–Пуассона

Л.С. Понтрягін “Звичайні диференціальні рівняння”

Спочатку прагнули ... ”інтегрувати диференціальні рівняння у квадратурах”, тобто намагалися записати розв'язок за допомогою елементарних функцій та інтегралів від них. Пізніше, коли з'ясувалося, що розв'язок в цьому сенсі існує лише для небагатьох типів рівнянь, центр тяжкості теорії був перенесений на вивчення загальних закономірностей поведінки розв'язків.

П.В. Харламов

... встановити рівень інформації про розв'язок, достатність її для зведення задачі до квадратур у тих випадках, коли така інформація відсутня. Такі, наприклад, деякі випадки інтегровності задачі про рух тіла в рідині, де повідомляється лише про четвертий інтеграл без етапу зведення задачі до квадратур. У деяких випадках, коли розв'язок будується на основі інваріантних співвідношень, виявилось, що задача зводиться до одного диференціального рівняння, для якого взагалі кажучи, не можуть бути вказані квадратури.

Якщо аналіз інформації про розв'язки буде виконано, то в результаті визначаються **математичні розв'язки**, які можуть бути доведені до рівня **повних розв'язків**.

Розв'язки задач динаміки твердого тіла

Геометрична інтерпретація руху твердого тіла у сенсі Л. Пуансо

Рух тіла відтворюється коченням незмінно пов'язаної з тілом лінійчастої поверхні (рухомого аксоїда) нерухомою в просторі лінійчастої поверхні (нерухомого аксоїда). Ці лінійчасті поверхні є конусами у випадку тіла з нерухомою точкою. **Довгий час відповідна теорема кінематики не знаходила застосування, оскільки не було конструктивного методу побудови нерухомого аксоїду.**

Метод годографів і “повні розв'язки” у сенсі П.В. Харламова

Для побудови аксоїдів достатньо знати їхні напрямні лінії – годографи. Пара дотичних просторових кривих є геометричною інтерпретацією руху. **Положення тіла повністю визначається рухомих годографом, незмінно пов'язаним із твердим тілом.**

Динаміка твердого тіла в школі П.В. Харламова

Станом на 1980 рік було відомо про 1188 публікацій, пов'язаних із задачею про рух твердого тіла з нерухомою точкою, з яких **854 роботи опубліковано протягом 1950–1980 років.**

Рівняння нерухомого годографа (ПММ 1964)

$$\omega_{\zeta} = \omega_1 v_1 + \omega_2 v_2 + \omega_3 v_3 ,$$

$$\omega_{\rho}^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_{\zeta}^2 ,$$

$$\omega_{\rho}^2 d\alpha = (\omega_3 v_2 - \omega_2 v_3) d\omega_1 + (\omega_1 v_3 - \omega_3 v_1) d\omega_2 + (\omega_2 v_1 - \omega_1 v_2) d\omega_3 .$$

Доклады Академии наук СССР
1964. Том 158, № 5

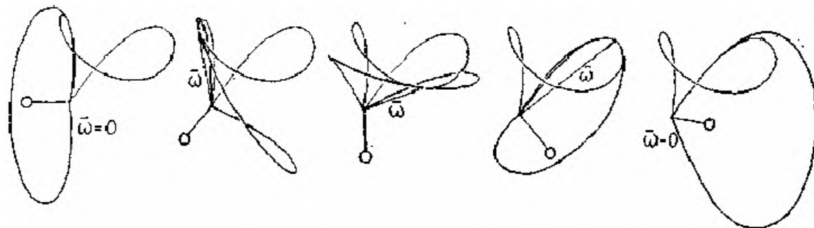
МЕХАНИКА

П. В. ХАРЛАМОВ

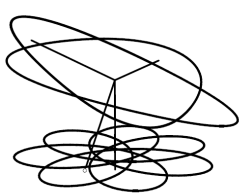
КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ИСТОЛКОВАНИЕ ОДНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ТЕЛА, ИМЕЮЩЕГО НЕПОДВИЖНУЮ ТОЧКУ

(Представлено академиком П. Я. Кочиной 29 IV 1964)

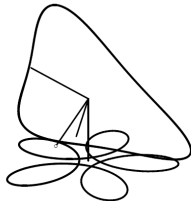
Годографи маятника Чаплигіна і гіроскопа Лагранжа



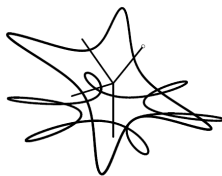
Харламов П.В. Избранные труды. - Київ: Наукова думка, 2005.



а) $E = 0.14866$, $k = .837$



б) $E = 0.814$, $k = 0.445$



в) $E = 1.06045$, $k = 0.47$

Метод інваріантних співвідношень

Інваріантне співвідношення за П.В. Харламовим

Співвідношення

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

є **інваріантним співвідношенням** для системи

$$\dot{x}_i = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

якщо система рівнянь відносно $(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

$$\varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv L_X \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

...

$$\varphi_{k+1}(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv L_X \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

...

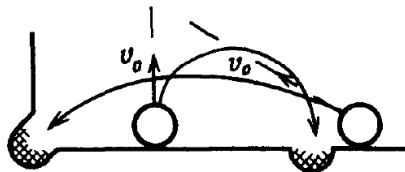
визначає непусту множину в $\mathbb{R}^n$.

A CRITIQUE OF SOME MATHEMATICAL MODELS OF MECHANICAL SYSTEMS WITH DIFFERENTIAL CONSTRAINTS†

P. V. KHARLAMOV

Donetsk

(Received 7 December 1988)



Еволюція наукової школи П.В. Харламова

Розвиток ідей П.В. Харламова

- Динаміка систем зв'язаних твердих тіл
- Теорія стійкості руху
- Теорія керування рухом
- Теорія тонких стержнів



Г. Галілей (1638): “Бесіди та математичні доведення...”

Співрозмовники: Сальвіаті, Сагредо, Сімпліціо.

“Чи не повинні ми визнати, що геометрія є наймогутнішим засобом для витончення наших розумових здібностей і дає нам можливість правильно мислити та розмірковувати?”

П.В. Харламов (1999): “Невизначені множники”

Співрозмовники: аспірант (А), доцент (Д), професор (П).

П.: “у наш час у механіці нерідко вихідні принципи подаються, за висловом Маха, у вигляді напівзрозумілих рецептів і виявляються критичному розуму якимись забобонами... ті проблеми, які виникали в основоположників механіки у важких пошуках ..., у наш час вирішуються не шляхом наступних уточнень..., а шляхом формування думки, що ці проблеми несуттєві та можуть бути проігноровані.”

В.І. Арнольд

Математика – це та частина фізики, де експерименти дешеві.

І.Р. Шафаревич

Яка ж цінність необмеженого нагромадження ідей, у принципі однаково глибоких? Чи не перетворюється математика на дивовижно гарний приклад “дурної нескінченності” Гегеля?

Не маючи мети, математика не може виробити і подання про свою форму, їй залишається як ідеал нічим не регульоване зростання, вірніше розширення за всіма напрямками.



П.В. Харламов (2000)

- Мета механіки – дослідження руху.
- Математика не має об'єктивних критеріїв прийнятості своїх теорій, тому у математиці є широкий спектр думок щодо її відношення до природничих наук.
- З арсеналу математики механіка використовує необхідний інструмент, вносячи у своїй конструкцію і властиві математиці протиріччя (доповнюючи ними свої).
- Побудова розв'язку та доведення його до чисельного результату, уточнення математичної моделі, що засновано на критичному аналізі результату – все це принципові відміни у підходах механіка та математика.
- Приклади ілюструють роль і значення суб'єктивно сформованої математичої моделі (в якій відображується світогляд авторів) при описі об'єктивного явища. Вони ілюструють і можливі варіанти стосунків механіки до математики у природничих дослідженнях, результати якого завжди можна оцінити за критеріями правильності, припустимості та простоти.

Донецька школа механіки

Понад 120 кандидатів і 19 докторів наук.



П.В. Харламов



Пам'ять про великих людей не менш
благодотворна, ніж їхня присутність.

Сенека (4 р. до н.е. – 65 р. н.е.)