

ВІДГУК

офіційного опонента

на дисертаційну роботу **Зозулі Євгена Сергійовича**

"Якісні властивості розв'язків вироджених еліптичних і параболічних рівнянь з сингулярними молодшими членами",

представлену на здобуття ступеня доктора філософії

з галузі знань 11 "Математика і статистика"

за спеціальністю 111 "Математика"

Вироджувані нелінійні еліптичні і параболічні рівняння виникають при математичному моделюванні багатьох процесів, що відбуваються у сильно неоднорідних середовищах. Як правило, для таких рівнянь класичних розв'язків може не існувати або довести їх існування вкрай складно, а тому говорять про різного рівня узагальнення цих розв'язків на випадок тих чи інших рівнянь і називають їх узагальненими або слабкими (як в даній дисертації) розв'язками. Слабкі розв'язки беруться із досить широких функційних просторів і природно виникають питання про додаткові, так звані, якісні властивості цих розв'язків, як наприклад, локальна чи глобальна обмеженість, поточкові оцінки, звичайна неперервність і неперервність за Гельдером, нерівність Гарнака, тощо. Як правило, ці властивості мають локальний характер, тобто вони характеризують слабкі розв'язки в обмежених підобластях областей, в яких задані рівняння. Розрізняють два типи локальних властивостей розв'язків: внутрішні та примежеві. Перші з них стосуються властивостей розв'язків у строго внутрішніх підобластях і при їх встановленні використовують властивості вхідних даних рівняння (грубо кажучи, коефіцієнтів і вільних членів), а другі — у обмежених підобластях, що "дотикаються" до межі області задання рівняння і при їх встановленні використовують властивості вхідних даних рівняння (грубо кажучи, коефіцієнтів і вільних членів) та функцій з крайових і початкових умов, а також гладкості межі області задання.

Якісні властивості слабких розв'язків однорідних лінійних еліптичних рівнянь дивергентного типу другого порядку з вимірними коефіцієнтами без молодших членів, такі як локальна обмеженість, неперервність за Гельдером та нерівність Гарнака, відомі ще з результатів Де Джорджі, Неша та Мозера. Ці результати було поширено Серріном, Ладизенською та Уральцевою, Аронсоном та Серріном і Трудінгером на широкі класи еліптичних та параболічних рівнянь з молодшими членами з відповідних просторів Лебега. На даний час аналогічні результати отримані і для еволюційних рівнянь з p -лапласіаном, рівнянь пористого середовища та параболічних рівнянь з абсорбцією. Наприклад, Кіппелайнен і Мали встановили точкові оцінки розв'язків, Каффареллі, Еванс, Ді Бенедетто, Фрідман довели неперервність слабких розв'язків рівнянь пористого середовища, Ді Бенедетто показав неперервність за Гельдером слабких розв'язків еволюційних рівнянь з p -лапласіаном та молодшими членами з лебегових просторів. Але залишаються відкритими проблеми якісної теорії сильно нелінійних і вироджуваних еліптичних та параболічних рівнянь. Ці проблеми частково вирішуються в даній дисертаційній роботі. Тому тема дисертації є актуальною.

Об'єктом вивчення даної дисертації є сильно нелінійні еліптичні та параболічні рівняння із вироджуваними та/або сингулярними коефіцієнтами.

Предмет вивчення — внутрішні якісні властивості слабких розв'язків таких рівнянь.

Мета дисертаційної роботи Зозулі Є.С. — дослідження внутрішніх якісних властивостей (таких як поточкові оцінки, неперервність, нерівність Гарнака, тощо) слабких розв'язків рівняння пористого середовища та рівняння з p -лапласіаном з вироджуваними та/або сингулярними ваговими коефіцієнтами в головній частині, а також рівняння пористого середовища, що містить ваговий абсорбційний член.

Робота складається з анотації, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел і додатку зі списком публікацій автора за темою дисертації.

Анотація повністю відображає суть всієї роботи.

У *вступі* обґрунтовано актуальність теми дисертації, визначено мету, завдання, об'єкт та предмет дослідження, вказано методи дослідження, сформульовано наукову новизну, теоретичне та практичне значення отриманих результатів. Наведено відомості про публікації, особистий внесок здобувача та апробацію результатів дисертації.

У *першому розділі* наведено достатньо повний огляд та аналіз першоджерел за тематикою дисертаційної роботи, приділено увагу історії та сучасному становищу проблематики, якій присвячена дана дисертація, а також визначено актуальні напрямки досліджень.

Другий розділ присвячений дослідженню слабких розв'язків рівняння пористого середовища з ваговими коефіцієнтами з класів Маккенхаупта. Основними результатами розділу є поточкові оцінки слабких розв'язків для виродженого та сингулярного випадків (теореми 2.1 та 2.2), твердження про неперервність розв'язків (теорема 2.3) та виконання нерівності Гарнака для невід'ємних розв'язків (теорема 2.4).

У *третьому розділі* розглядаються слабкі розв'язки параболічних рівнянь з p -лапласіаном та коефіцієнтами, що є представниками класів Маккенхаупта. Основними результатами розділу є поточкова верхня оцінка слабких розв'язків у виродженому випадку (теорема 3.1), твердження про обмеженість (теорема 3.2) та неперервність розв'язків (теорема 3.3) та доведення нерівності Гарнака для невід'ємних розв'язків (теорема 3.4).

У *четвертому розділі* розглядаються якісні властивості слабких розв'язків рівняння пористого середовища з абсорбцією. Основними результатами розділу є доведення нерівності Гарнака для невід'ємних розв'язків рівняння (теорема 4.1), апріорні оцінки типу Келлера-Оссермана (теорема 4.2), твердження типу леми Де Джорджі для рівняння пористого середовища з абсорбцією (теорема 4.3).

Відмітимо, що з одержаних результатів для параболічних рівнянь легко випливають відповідні результати для еліптичних рівнянь, які отримуються з досліджених параболічних при умові, що в них члени з похідною невідомої функції за часовою змінною відсутні, а коефіцієнти і вільні члени рівнянь від часової змінної не залежать. Справді, розв'язки таких еліптичних рівнянь (які, очевидно, від часової змінної не залежать) можна вважати розв'язками відповідних параболічних рівнянь з рівним

одиниці коефіцієнтом при похідній розв'язку за часовою змінною.

Всі основні результати дисертації Зозулі Є.С. є новими і отримані автором особисто. Варто відзначити, що дисертант вирішив складні ідейні та технічні проблеми, застосував факти з різних галузей математики. Зокрема, для вирішення поставлених завдань у дисертаційній роботі введені нові вагові потенціали та використані ітераційна техніка Де Джорджі, метод локальних енергетичних оцінок, метод внутрішнього масштабування Ді Бенедетто, ітераційна техніка Кіппелайнен-Мали, адаптована для дослідження параболічних рівнянь, метод точних поточкових оцінок розв'язків типу "нелінійного" потенціалу, який був запропонований І.В. Скрипніком для еліптичних дивергентних квазілінійних рівнянь та розвинутий І.І. Скрипніком для параболічних рівнянь. Це, зокрема, дає підстави стверджувати, що здобувач оволодів методологією наукової діяльності на достатньо високому рівні.

Робота має теоретичний характер. Отримані результати можуть бути використані для проведення подальших наукових досліджень у відповідній тематиці.

Основні результати дисертації достатньо повно опубліковано в 7 статтях, 4 з яких — у виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз (Scopus), 3 — у фахових вітчизняних виданнях. Робота пройшла апробацію на конференціях (4 тез доповідей) та наукових семінарах (3 виступи з доповіддю).

Робота виконана на достатньо високому науковому рівні, оформлена відповідно до чинних правил оформлення дисертацій, матеріал викладено логічно послідовно, доведення тверджень достатньо повні і математично строгі. Отримані результати відповідають темі дисертації.

Мають кілька зауважень та побажань до оформлення дисертації:

- 1) Оскільки в дисертації вивчаються тільки внутрішні локальні властивості слабких розв'язків досліджуваних рівнянь, то в розділі 2 можна не вважати, що область Ω є обмеженою, і, крім того, всюди в змістовній частині (розділи 2 — 4) дисертації слабкі розв'язки відповідних рівнянь варто розглядати в просторах локально інтегровних функцій (див., наприклад, роботу [44]), а тестові функції брати гладкими і фінітними, тобто з компактними носіями в області задання рівнянь.
- 2) На сторінці 39, 3-й рядок знизу, замість слів " $\psi_y(r)$ не є спадною" треба, як випливає з контексту, писати слова " $\psi_y(r)$ є зростаючою". Також там варто було навести приклад функції $\psi_y(r)$.
- 3) В умові (2.14) описка: замість $I_{v,w,f}(x,t,R)$ треба $I_{v,w,f}(x,t,R, \frac{1}{\psi_x(R)})$.
- 4) У формулюванні теореми 2.3 описка: має бути $m > 1$ замість (2.11).
У формулюванні теореми 2.4 описка: умова (2.11) є зайвою і її треба прибрати.
- 5) В (3.7) має бути $|f|$ замість f .
- 6) У формулюванні теореми 3.1 описка: символи c_0, c_1 є зайвими, а замість N треба писати n .
- 7) Перед формулюванням теореми 3.3 у визначенні $\Phi^f(\rho)$ описка, а саме, пропущено $\sup_{(x,t) \in \Omega_T}$ перед $P_{v,w}^f(x,t;\rho)$, тобто має бути $\Phi^f(\rho) := \sup_{(x,t) \in \Omega_T} P_{v,w}^f(x,t;\rho)$.
- 8) Позначення, які фігурують у формулюванні теореми 3.4, бажано було б навести перед формулюванням цієї теореми (вони наведені пізніше на стор. 113).
- 9) В інтегральній тотожності (4.8) описки: пропущено символ φ біля a_0 і b .

Ці зауваження та описки і мовні огріхи граматичного і стилістичного характеру, які зустрічаються в тексті, не мають принципового значення і не впливають на загальну позитивну оцінку роботи.

Дисертація є завершеною працею, в якій отримані нові науково обґрунтовані результати, що в сукупності вирішують конкретну наукову задачу суттєвого значення для теорії диференціальних рівнянь.

Вважаю, що дисертаційна робота Зозулі Євгена Сергійовича "Якісні властивості розв'язків вироджених еліптичних і параболічних рівнянь з сингулярними молодшими членами" задовольняє всі вимоги чинного положення про присудження наукових ступенів, а її автор заслуговує присвоєння наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 "Математика".

Офіційний опонент

професор кафедри математичної статистики і
диференціальних рівнянь
Львівського національного університету
імені Івана Франка,
доктор фізико-математичних наук,
професор

Бокало М.М.