

РЕЦЕНЗІЯ

на дисертаційну роботу **Зозулі Євгена Сергійовича** на тему
«Якісні властивості розв'язків вироджених еліптичних і параболічних рівнянь
з сингулярними молодшими членами»,
поданої на здобуття наукового ступеня доктора філософії
з галузі знань 11 Математика та статистика
зі спеціальності **111 Математика**

Актуальність теми дисертації. Як добре відомо, рівняння з частинними похідними моделюють різноманітні природні процеси у фізиці, інженерії, біології, економіці та інших науках. Зокрема, еліптичні та параболічні рівняння другого порядку описують процеси швидкої та повільної дифузії, фільтрації, теплопровідності у стаціонарних та нестаціонарних випадках. Дослідження таких рівнянь є складним процесом і визначається необхідністю застосування спеціалізованого математичного апарату.

Сучасна теорія квазілінійних еліптичних і параболічних рівнянь бере свій початок з робіт Де Джорджі, Неша і Мозера. В подальшому їх результати поширювались багатьма авторами-математиками. Перші узагальнення були отримані Серріном, Ладиженською, Уральцевою, Аронсоном, Трудінгером. Цими авторами було розглянуто еліптичні і параболічні рівняння з молодшими членами в лебегових просторах L^q з показником $q > \frac{n}{p}$. Після цього різними авторами були отримані результати з якісної теорії квазілінійних еліптичних і параболічних рівнянь з вагою і молодшими членами у відповідних лебегових просторах. Отже, вивчення таких рівнянь є перспективним напрямом в сучасній математиці, оскільки вони описують широке коло природних процесів, дослідження яких є достатньо складним та вимагає застосування спеціального математичного інструментарію.

Дисертаційна робота Зозулі Є.С присвячена дослідженню властивостей узагальнених (слабких) розв'язків трьох параболічних рівнянь: рівняння пористого середовища з ваговими коефіцієнтами та сингулярним молодшим членом, параболічного рівняння р-лапласу з ваговими коефіцієнтами й сингулярним молодшим членом та рівняння пористого середовища з ваговим абсорбційним членом. В роботі представлено повне і ґрунтовне дослідження якісних властивостей розв'язків розглянутих рівнянь. Всі розглянуті автором рівняння є модельними і мають фізичні та хімічні застосування.

Вважаю, що тема дисертації, обрана Є.С. Зозулею, є актуальною, та спрямована на вирішення сучасної наукової проблеми в галузі математики.

Новизна представлених результатів, проведених здобувачем досліджень. У дисертаційній роботі Зозулі Є.С. проведено комплексне дослідження якісних властивостей розв'язків трьох вагових параболічних рівнянь. А саме, вперше розглянуто випадок рівняння пористого середовища та рівняння з p -лапласіаном, що містять вагові коефіцієнти й сингулярний молодший член та досліджено рівняння пористого середовища з ваговим абсорбційним членом. У процесі дослідження введено нові вагові потенціали, нові означення узагальненого розв'язку, нові відповідні структурні умови, отримано нерівності Качіюполлі для кожного з трьох рівнянь, що дозволило отримати принципово нові результати.

Зокрема, Зозулею Є.С. отримано наступні нові наукові результати, які виносяться на захист:

1. Для рівняння пористого середовища з ваговими коефіцієнтами побудовано нелінійний ваговий параболічний потенціал Рісса правої частини рівняння й отримано обмеженість і неперервність слабких розв'язків та нерівність Гарнака в термінах вагового потенціалу Рісса правої частини рівняння.

2. Для рівняння з p -лапласіаном, що містить вагові коефіцієнти побудовано нелінійний ваговий параболічний потенціал Вольфа правої частини рівняння та отримано обмеженість і неперервність слабких розв'язків та нерівність Гарнака в термінах вагового потенціалу Вольфа правої частини рівняння.

3. Для рівняння пористого середовища з членом поглинання отримано вагові апіорні оцінки типу Келлера-Осермана та доведено нерівність Гарнака.

В постановці автора отримані ним результати узагальнюють відомі результати для невагового випадку.

Наукова обґрунтованість та відповідність темі дисертації. Аналіз дисертації Зозулі Є.С. та наукових посилань в роботі вказує на обґрунтованість і достовірність отриманих автором результатів, оскільки всі твердження супроводжуються строгими математичними доведеннями та ґрунтуються на попередніх публікаціях. Висновки, сформульовані в дисертації, узагальнюють основні положення роботи та акцентують увагу на науковій новизні. Список використаних джерел демонструє, що автором проведено детальне вивчення попередніх результатів, отриманих за напрямом дисертації.

Матеріали дисертації пройшли необхідну апробацію та були представлені на міжнародних і всеукраїнських наукових конференціях та семінарах. В цілому дисертаційна робота є завершеним науковим дослідженням на тему «Якісні властивості розв'язків вироджених еліптичних і параболічних рівнянь з

сингулярними молодшими членами» та відповідає спеціальності 111 Математика.

Рівень виконання поставленого наукового завдання. Перед автором дисертації було поставлено декілька наукових завдань:

- побудувати і застосувати спеціальні пробні функції, використовуючи структурні особливості рівняння та існуючі приклади, для отримання поточкових оцінок;

- сконструювати потрібні вагові потенціали, що дало б змогу отримати оцінки розв'язків параболічних рівнянь, аналогів «пуассонівських» інтегральних представлень;

- розвинути метод точних поточкових оцінок розв'язків типу «нелінійного потенціалу» для дослідження слабких розв'язків параболічних рівнянь;

- отримати енергетичні оцінки, що є аналогами основної нерівності Ладженської-Уральцевої або нерівності Качіополлі;

- отримати оцінки типу Келлера-Оссермана для розв'язків параболічних рівнянь з абсорбцією;

- розширити клас функцій, що входять до складу молодших членів рівняння та описують їх сингулярність.

Вважаю, що поставлені завдання автором дисертації були повністю виконані і, відповідно, досягнуто поставленої мети дослідження. Високий рівень виконання наукових досліджень підтверджується якістю публікацій, серед яких 4 статті опубліковано у виданнях, що індексуються міжнародною наукометричною базою Scopus та відносяться до статей Q3 та 3 статті опубліковано у фахових виданнях України категорії Б.

Оволодіння здобувачем методологією наукової діяльності. Дисертація Зозулі Є.С. складається з анотації, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел і додатку зі списком публікацій автора за темою дисертації. Повний обсяг дисертації становить 163 сторінки. Структура дисертації логічно побудована і сприяє розкриттю теми дослідження. Наукове дослідження Зозулі Є.С. відповідає вимогам щодо оформлення дисертацій доктора філософії. Використовувана в роботі наукова термінологія є загальновизнаною, стиль подання доведених наукових тверджень забезпечує доступність їх сприйняття. Слід відмітити, що більшість статей опубліковано автором одноосібно. Вважаю, що автор дисертації Зозуля Є.С. оволодів методологією наукової діяльності та має необхідні компетентності щоб проводити самостійні дослідження.

Під час ознайомлення та аналізу дисертаційної роботи порушень академічної доброчесності не виявлено.

Загальна оцінка наукового рівня дисертації і наукових публікацій здобувача. На підставі детальної експертизи поданої на захист дисертаційної роботи можна зазначити, що Зозулею Є.С. досліджені актуальні наукові задачі, розв'язання яких надає нові можливості для їх подальшого використання в якісній теорії диференціальних рівнянь в частинних похідних та при розв'язанні прикладних задач.

Високий науковий рівень дисертації підтверджують публікації дисертанта. Варто зазначити, що основні результати дисертаційної роботи опубліковані у 7 наукових статтях, з яких, 4 статті у наукових виданнях, що індексуються в міжнародній наукометричній базі Scopus та 3 статті у фахових виданнях України. Результати роботи пройшли апробацію на 2 семінарах та 4 наукових конференціях.

Дискусійні моменти та зауваження до дисертаційної роботи. Позитивно оцінюючи дисертаційну роботу Зозулі Євгена Сергійовича, хочу звернути увагу на наступні зауваження та дискусійні моменти:

1. Назва дисертації сформульована як «Якісні властивості розв'язків вироджених еліптичних і параболічних рівнянь з сингулярними молодшими членами», але сама робота присвячена дослідженню трьох параболічних рівнянь. Чи не краще було б залишити в назві лише параболічні рівняння, оскільки вони є основним об'єктом дослідження?

2. Перше речення Зауваження 2.1. слід сформулювати наступним чином: «Умови на $\psi_y(r)$ достатньо природні».

3. В Лемі 2.3. словосполучення «нехай слухна нерівність» слід сформулювати, наприклад, як «нехай виконується нерівність».

4. В Теоремі 3.6 в першому реченні відсутнє посилання на рівняння, яке розглядається.

5. На с.113 в рядку 3 зверху немає посилання на твердження у словосполученні «і прийдемо до твердження...».

6. В роботі не завжди використовується вдала математична термінологія. Так, замість слова «рішення» краще було б використовувати «розв'язок», замість «сумувавши» краще було б використовувати «просумувавши», замість «доказ» краще було б використовувати «доведення», замість «получимо» краще було б використовувати «отримаємо», замість «скажемо» або «говоримо» краще було б використовувати «будемо казати», замість «на протязі» краще було б використовувати «протягом», замість «в противному випадку» краще було б використовувати «в іншому випадку».

7. В розділах 3 та 4 зустрічаються слова, що не було перекладено з англійської мови.

Ці побажання у більшості мають рекомендаційний характер і не впливають на загальну позитивну оцінку роботи та можуть бути враховані в подальшому при підготовці наукових робіт.

Висновок щодо відповідності дисертації. В цілому дисертаційна робота Євгена Сергійовича Зозулі «Якісні властивості розв'язків вироджених еліптичних і параболічних рівнянь з сингулярними молодшими членами» є цілісною, самостійною, завершеною науковою роботою, яку виконано на актуальну наукову тему. Дисертація повністю відповідає вимогам до оформлення дисертацій, затвердженим наказом МОН України від 12.01.2017 р. № 40 зі змінам і доповненнями, внесеними наказом МОН України від 31.05.2019 р. № 759 та вимогам Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії, затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України від 12.01.2022 р. № 44 зі змінами на поточну дату. Дисертація може бути представлена до захисту, а її автор Євген Сергійович Зозуля заслуговує присудження йому наукового ступеня доктора філософії зі спеціальності 111 Математика в галузі знань 11 Математика та статистика.

Доктор фізико-математичних наук, доцент,
заступник директора з наукової роботи
Інституту прикладної математики і
механіки НАН України

О.В. Несмелова

*Підпис О.В. Несмелової
засвідчую*

