

ВІДГУК

офіційного опонента

на дисертаційну роботу Зозулі Євгена Сергійовича

“Якісні властивості розв’язків вироджених еліптичних і

параболічних рівнянь з сингулярними молодшими членами”,

подану на здобуття наукового ступеня доктора філософії з галузі знань

11 «Математика і статистика» за спеціальністю 111 «Математика»

Актуальність теми дисертаційної роботи. Задачі, пов’язані з дослідженням властивостей розв’язків диференціальних рівнянь у частинних похідних привертають увагу багатьох авторів протягом останніх кількох десятиліть. Зростає зацікавленість до параболічних та еліптичних рівнянь завдяки їхньому застосуванню в моделюванні нелінійних фізичних процесів, що відбуваються у неоднорідних середовищах. Також ці рівняння цікаві тим, що загальна якісна теорія для них не побудована.

Першого суттєвого успіху для рівняння p -Лапласа з мірою у правій частині досягли Кіппелайнен і Малій. Вони встановили точкові оцінки розв’язків в термінах нелінійного потенціалу Вольфа. Ці результати згодом були поширені Трудінгером та Вангом, Лабутіним на нелінійні нерівномірно еліптичні рівняння. Еліптичні та параболічні рівняння без або з сингулярними молодшими членами вивчалися протягом тривалого часу. Перші результати в цьому напрямку отримали Фабес, Кеніг, Сепаріоні, Гутієррес для вагового лінійного еліптичного рівняння з вагою, що є представником A_2 -класа Маккенхаупта. Серед дослідників, які отримали перші значні результати, зазначимо Ді Бенедетто Е., Богелейн В., Дузаар Ф., Іванов А. В., Веспрі В., Джанацца У.

Дисертаційна робота Є.С. Зозулі присвячене розв’язанню подібних задач для нелінійних рівнянь дивергентного типу, що містять вагу у головній частині рівняння, і на мою думку, *тема дисертаційної роботи є цікавою і актуальною.*

Зміст та наукова новизна результатів дисертаційної роботи. Дисертаційна робота має загальний обсяг 161 сторінку і складається з анотації, переліку позначень, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел.

них джерел, що містить 171 посилання, а також додатку, який містить список публікацій здобувача.

У *розділі 1* наведено опис історії розвитку теорії диференціальних рівнянь, починаючи з класичних розв'язків та інтегральних представлень розв'язків рівнянь Лапласа та Пуассона і до значних результатів, отриманих математиками сучасності.

У *розділі 2* досліджуються розв'язки вагового рівняння пористого середовища. Зокрема, отримано «енергетичні оцінки», побудовано ваговий потенціал Рісса правої частини рівняння, доводиться обмеженість зверху у сингулярному та виродженому випадках. Доведення було уніфікованим, тобто проводилось одночасно для обох випадків, що відрізняє спосіб доведення від звичного, коли розглядаються ці випадки окремо. Отримано достатню умову для неперервності розв'язків і показано виконання нерівності Гарнака. Основними результатами розділу є доведення обмеженості (теореми 2.1 і 2.2) і неперервності (теорема 2.3) розв'язків, а також умов виконання нерівності Гарнака (теорема 2.4) для невідємних розв'язків вагового рівняння пористого середовища.

У *розділі 3* досліджуються розв'язки вагового рівняння параболічного p -Лапласіану. Отримано «енергетичні оцінки», побудовано ваговий потенціал Вольфа правої частини рівняння. Доведено обмеженість зверху у виродженому випадку, з застосуванням потенціалу правої частини рівняння, отримано достатню умову для неперервності розв'язків, показано виконання нерівності Гарнака. Головними результатами розділу є доведення обмеженості (теореми 3.1) і неперервності (теорема 3.2) розв'язків, а також умов виконання нерівності Гарнака (теорема 3.3) для невідємних розв'язків вагового рівняння параболічного p -Лапласіану.

Для рівняння пористого середовища з членом поглинання у *розділі 4* отримано «енергетичні оцінки», показано виконання нерівності Гарнака (теорема 4.1), отримано апріорні оцінки типу Келлера-Оссермана (теорема 4.2).

Відповідно до традиційної структури дисертації, основна частина нових, встановлених особисто дисертантом результатів, подана в другому, третьому

і четвертому розділах. До переваг дослідження Зозулі Є.С. слід віднести те, що в роботі було проведено одночасне дослідження трьох різних складних випадків вагових параболічних рівнянь для яких отримано такі нові якісні властивості, як неперервність та обмеженість слабких розв'язків, нерівність Гарнака та проведено узагальнення раніше отриманих результатів.

Обґрунтованість і достовірність результатів дисертаційної роботи. Усі основні результати, що містяться у дисертаційній роботі, мають строгі математичні доведення, які наведено з достатньою повнотою, що забезпечує достовірність та несуперечливість отриманих результатів. Тому, вважаю, що *усі основні результати є обґрунтованими і достовірними.*

Рівень виконання поставленого наукового завдання. Наукове завдання, поставлене перед дисертантом, полягало у дослідженні трьох вагових параболічних рівнянь з дивергентною головною частиною, зокрема, рівняння пористого середовища, рівняння з р-лапласіаном та рівняння з абсорбційним членом, та отримання точних поточкових оцінок та умов їх виконання для визначення характеру розв'язків цих рівнянь. Вважаю, що поставлені завдання Зозулею Є.С. було повністю виконані і, відповідно, досягнуто поставлену мету дослідження. Високий рівень виконання наукових досліджень підтверджується якістю публікацій, серед яких 4 статті опубліковано у міжнародних виданнях квартілю Q3, серед яких 3 статті опубліковано автором одноосібно.

Оволодіння здобувачем методологією наукової діяльності. Використовувана в роботі наукова термінологія є загальновизнаною, стиль подання доведених наукових тверджень забезпечує доступність їх сприйняття. Більшість наукових публікацій автором опубліковано самостійно, що свідчить про достатньо високий рівень набуття ним необхідних фахових компетенцій. Вважаю, що автор дисертації Є.С. Зозуля оволодів методологією наукової діяльності та має необхідну кваліфікацію щоб проводити дослідження самостійно.

Повнота викладу результатів дисертаційної роботи у публікаціях та їх апробація. Усі основні результати дисертаційної роботи з достатньою повнотою відображені у 11 наукових роботах, 4 з яких опубліковано

у журналах, які входять до наукометричної бази Scopus, 3 є статтями у наукових виданнях, внесених до переліку наукових фахових видань України категорії Б, а 4 – тези доповідей на міжнародних та вітчизняних конференціях.

Результати дисертаційної роботи *пройшли достатню апробацію*. Вони доповідались як на наукових конференціях, так і на наукових семінарах.

Академічна доброчесність. За результатами ознайомлення з текстом дисертаційної роботи не помічено ознак академічного плагіату, фабрикацій або фальсифікації. Усі наведені результати інших авторів мають посилання на відповідне джерело. У тексті дисертаційної роботи вказано внесок здобувача у всі результати з наукових статей, які опубліковані разом зі співавторами.

Практичне значення результатів дисертаційної роботи. Результати дисертаційної роботи носять теоретичний характер. Вони можуть знайти своє застосування у наукових дослідженнях та при підготовці навчальних курсів з диференціальних рівнянь, математичної фізики та інших галузей математики.

До змісту дисертаційної роботи та її оформлення є такі **зауваження**:

1. Варто було б у вступній частині навести рівняння Лапласа, його фундаментальний розв'язок та формулу потенціалу Ньютона.
2. Стор. 29, останній рядок: не є зрозумілим призначення показника, можна було б більше на цьому зосередитись.
3. Стор. 30, рядок 2: в оцінці присутній доданок, що відповідає за геометрію області, вважаю за доцільне більш детально описати цей факт.

Висновки. Дисертаційна робота Зозулі Є.С. є самостійною, завершеною науковою працею. Вона містить нові, обґрунтовані результати і має теоретичне значення для розвитку теорії диференціальних рівнянь у частинних похідних. Робота є актуально, характеризується єдністю змісту. Структура і обсяг дисертації відповідають встановленим вимогам. Анотація в достатній повноті відображає зміст дисертаційної роботи. Результати дисертаційної роботи належним чином опубліковані і апробовані. *Наведені вище зауваження не впливають на загальну високу оцінку роботи.*

Вважаю, що дисертаційна робота *Зозулі Євгена Сергійовича* “Якісні властивості розв’язків вироджених еліптичних і параболічних рівнянь з сингулярними молодшими членами”, яку подано на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 Математика задовольняє вимогам наказу Міністерства освіти і науки України № 40 від 12.01.2017 р. «Про затвердження Вимог щодо оформлення дисертації» (із змінами, внесеними згідно з Наказом Міністерства освіти і науки № 759 від 31.05.2019), а також відповідає вимогам пунктів 6-9 Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії, затвердженого постановою КМУ від 12.01.2022 р. № 44 (із змінами, внесеними згідно з Постановами КМ № 341 від 21.03.2022 р., № 502 від 19.05.2023 р., № 507 від 03.05.2024 р.), а її автор заслуговує присвоєння наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 Математика в галузі знань 11 Математика та статистика.

**Доктор фізико-математичних наук, професор,
проректор з науково-педагогічної роботи
Донбаського державного
педагогічного університету**

Станіслав ЧАЙЧЕНКО