

ЗАТВЕРДЖУЮ

Заступник директора з наукової роботи

Інституту прикладної математики

і механіки НАН України,

доктор фізико-математичних наук,

доцент



Ольга НЕСМЕЛОВА

10 грудня 2024 року

ВИСНОВОК

про наукову новизну, теоретичне та практичне значення результатів дисертації

Зозулі Євгена Сергійовича

**«Якісні властивості розв'язків вироджених еліптичних і параболічних рівнянь
з сингулярними молодшими членами»**

яка подається на здобуття ступеня доктора філософії

в галузі знань 11 Математика та статистика

зі спеціальності 111 Математика

1. Оцінка роботи здобувача у процесі підготовки дисертації і виконання індивідуального навчального плану та індивідуального плану наукової роботи.

Зозуля Євген Сергійович виконав у повному обсязі Індивідуальний план освітньо-наукової програми підготовки доктора філософії. Освітня програма в обсязі 48 кредитів ECTS виконана в повному об'ємі. Він успішно пройшов асистентську педагогічну практику (100 б.) та склав 9 іспитів та 3 заліки з наступних дисциплін:

Іспити:

- 1) Філософія науки та культури – 100 б.
- 2) Іноземна мова професійного спрямування для підготовки аспірантів до рівня загально-європейського стандарту володіння мовою C1 – 80 б.
- 3) Якісні методи дослідження вироджених та сингулярних параболічних рівнянь – 97 б.
- 4) Квазіконформний аналіз і крайові задачі математичної фізики – 100 б.
- 5) Лінійні та квазілінійні рівняння еліптичного і параболічного типу – 98 б.
- 6) Сучасні проблеми теорії нелінійних коливань – 93 б.
- 7) Модулі в сучасній теорії відображень – 100 б.
- 8) Деякі питання якісної теорії еліптичних рівнянь другого порядку – 95 б.
- 9) Елементи функціонального аналізу та їх застосування до загальної теорії еліптичних граничних задач – 97 б.

Заліки:

- 10) Методологія підготовки наукової публікації та дисертаційної роботи – 92 б.
- 11) Організація науково-дослідницької та викладацької діяльності – 95 б.
- 12) Асистентська педагогічна практика – 100 б.

За період навчання в аспірантурі Зозуля Є.С. набув необхідних знань, умінь і навичок, що визначені відповідно для восьмого рівня Національної рамки кваліфікацій, затвердженої постановою Кабінету Міністрів України від 23 листопада 2011 р. № 1341. Зокрема, відповідно визначеним в освітньо-науковій програмі програмним результатам навчання Зозуля Є.С. має концептуальні та методологічні знання в галузі чи на межі галузей знань або професійної діяльності (ПРН 1), спеціалізовані уміння/навички і методи,

необхідні для розв'язання значущих проблем у сфері професійної діяльності, науки та/або інновацій, розширення та переоцінки вже існуючих знань і професійної практики; має навички започаткування, планування, реалізації та коригування послідовного процесу ґрунтовного наукового дослідження з дотриманням належної академічної доброчесності (ПРН 9, ПРН 13 – ПРН 19, ПРН 20) та критичного аналізу, оцінки і синтезу нових та комплексних ідей (ПРН 5, ПРН 11, ПРН 12); має комунікативні навички вільного спілкування з питань, що стосуються сфери наукових та експертних знань, з колегами, широкою науковою спільнотою, суспільством у цілому (ПРН 7) та використання академічної української та іноземної мови у професійній діяльності та дослідженнях (ПРН 8), демонструє значну авторитетність, інноваційність, високий ступінь самостійності, академічної та професійної доброчесності, постійну відданість розвитку нових ідей або процесів у передових контекстах професійної та наукової діяльності (ПРН 2 – ПРН 4) та здатність до безперервного саморозвитку та самовдосконалення (ПРН 10).

2. Обґрунтування вибору теми дослідження.

Останнім часом увага фокусується на дослідженні розв'язків рівнянь, що моделюють певні фізичні процеси. Зокрема, саме еліптичні та параболічні рівняння другого порядку описують процеси дифузії, фільтрації, дисипації, теплопровідності у стаціонарних та нестаціонарних випадках. Модельними випадками таких рівнянь є рівняння пористого середовища з ваговими коефіцієнтами, вагове рівняння з р-лапласіаном та рівняння пористого середовища з абсорбційним членом.

Метою дисертаційної роботи є вивчення якісних властивостей слабких розв'язків рівнянь, а саме: отримання поточкових оцінок та умов неперервності розв'язків, перевірка виконання нерівності Гарнака для рівняння пористого середовища та рівняння з р-лапласіаном; отримання апіорних оцінок типу Келлера-Оссермана та доведення нерівності Гарнака для рівняння пористого середовища з абсорбційним членом.

Об'єктом дослідження є параболічні рівняння з ваговими коефіцієнтами, зокрема, рівняння пористого середовища, рівняння з р-лапласіаном, рівняння з абсорбційним членом.

Методи дослідження. Для вирішення поставлених задач у дисертаційній роботі використані ітераційна техніка Де Джорджі, метод локальних енергетичних оцінок, метод внутрішнього масштабування Ді Бенедетто, ітераційна техніка Кіппелайнен-Малий, адаптована для дослідження параболічних рівнянь, метод точних поточкових оцінок розв'язків типу "нелінійного потенціалу", який був запропонований І. В. Скрипніком для еліптичних дивергентних квазілінійних рівнянь, розвинутий І. І. Скрипніком для параболічних рівнянь.

Основні задачі дослідження:

- побудувати і застосувати спеціальні пробні функції, використовуючи структурні особливості рівняння та існуючі приклади, для отримання поточкових оцінок;
- зконструювати потрібні вагові потенціали, що дало б змогу отримати оцінки розв'язків параболічних рівнянь, аналогів «пуассонівських» інтегральних представлень;
- розвинути метод точних поточкових оцінок розв'язків типу «нелінійного потенціалу» для дослідження слабких розв'язків параболічних рівнянь;
- отримати енергетичні оцінки, що є аналогами основної нерівності Ладженської-Уральцевої або нерівності Качіополлі;
- отримати оцінки типу Келлера-Оссермана для розв'язків параболічних рівнянь з абсорбцією;
- розширити клас функцій, що входять до складу молодших членів рівняння та описують їх сингулярність.

3. Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертаційну роботу виконано під керівництвом академіка НАН України Скрипніка І.І. у відділі нелінійного аналізу та рівнянь математичної фізики Інституту прикладної математики і механіки НАН України відповідно до тематики досліджень відділу та в рамках таких державних науково-дослідних робіт:

1) «Спектральні та якісні властивості еліптичних та параболічних граничних задач та їх розв'язків», науково-дослідна робота за відомчою тематикою НАН України, р/н 0116U002032, 0119U103543, 2016-2019;

2) «Властивості сингулярних розв'язків диференціальних та різницевих систем, які моделюють складні нелінійні фізичні процеси», науково-дослідна робота за відомчою тематикою НАН України, р/н 0120U100178, 2020-2024;

3) «Сучасні методи теорії крайових задач та їх застосування до проблем математичної фізики і механіки», науково-дослідна робота за програмою «Підтримка пріоритетних для держави наукових досліджень і науково-технічних (експериментальних) розробок Відділення математики НАН України у 2022 році», р/н 0122U000594, 2022.

4. Особистий внесок дисертанта в отримання наукових результатів та їх новизна.

Постановка задач та загальний план дослідження належать науковому керівникові. Основні результати дисертаційної роботи з повними обґрунтуваннями, опубліковано у 7 статтях, 5 з яких [1]-[3], [5], [6] написані автором одноосібно. Стаття [7] написана у співавторстві з науковим керівником, доктором фізико-математичних наук, академіком Скрипником І.І., де постановка задачі належить науковому керівнику, решта результатів отримано автором дисертації самостійно. Стаття [4] написана у співавторстві з Бичковим А.С. та Гаджи О.В., де автору дисертаційної роботи належить формулювання і доведення леми 2.4.

Наукова новизна отриманих результатів

У дисертаційній роботі представлено цілісне дослідження якісних властивостей розв'язків трьох вагових параболічних рівнянь. Вперше розглянуто рівняння пористого середовища та рівняння з p -лапласіаном, які містять вагові коефіцієнти та сингулярний молодший член. Вперше розглянуто рівняння пористого середовища з ваговим абсорбційним членом. При дослідженні була використана ітераційна техніка Кіппелайнен-Мали, адаптована до параболічних рівнянь, введені нові вагові потенціали, що забезпечило отримання принципово нових результатів. Крім того, в роботі було введено нові означення узагальненого розв'язку, введено нові відповідні структурні умови. отримано нерівності Качіополлі для кожного з трьох рівнянь та отримані такі результати.

Для рівняння пористого середовища з ваговими коефіцієнтами:

- побудовано нелінійний ваговий параболічний потенціал Рісса правої частини рівняння;
- отримано обмеженість і неперервність слабких розв'язків та нерівність Гарнака в термінах вагового потенціалу Рісса правої частини рівняння.

Для рівняння з p -лапласіаном, що містить вагові коефіцієнти:

- побудовано нелінійний ваговий параболічний потенціал Вольфа правої частини рівняння;
- отримано обмеженість і неперервність слабких розв'язків та нерівність Гарнака в термінах вагового потенціалу Вольфа правої частини рівняння.

Для рівняння пористого середовища з членом поглинання:

- отримано вагові апіорні оцінки типу Келлера-Осермана;

- доведено нерівність Гарнака, яка узагальнює відомі результати для невагового випадку.

Для всіх розглянутих рівнянь розширено клас функцій, що входять до складу молодших членів та описують їх сингулярність, а доведені теореми узагальнюють відомі результати для невагового випадку.

5. Обґрунтованість і достовірність наукових положень, висновків і результатів, які захищаються.

Результати досліджень були викладені у вигляді математичних тверджень, що супроводжуються строгими математичними доведеннями та порівняні з відомими вже існуючими результатами з відповідної проблематики. Обґрунтованість і достовірність наукових положень, висновків і доведень забезпечуються коректним застосуванням математичного апарату, несуперечливістю з відомими положеннями. Основні результати дисертаційного дослідження опубліковані у фахових вітчизняних і міжнародних виданнях та апробовано на всеукраїнських і міжнародних наукових конференціях.

6. Наукове, теоретичне та практичне значення результатів дисертації.

Робота має теоретичний характер. Отримані в роботі фундаментальні результати та зібраний практичний матеріал можуть бути використані як основа для проведення подальших наукових досліджень у галузі диференціальних рівнянь. Крім того, результати будуть корисними при розробці та читанні курсів для підготовки фахівців з диференціальних рівнянь, математичної фізики, а також суміжних напрямків.

7. Повнота викладення матеріалів дисертації в роботах, опублікованих автором.

Результати дисертаційної роботи повною мірою висвітлено у 7 наукових статтях, з них 4 статті опубліковано у виданнях, що індексуються міжнародною наукометричною базою Scopus та відносяться до статей Q3 відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank та 3 статті опубліковано у фахових виданнях України категорії Б.

Відповідно до положень п. 8 Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії, затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України від 12.01.2022 №44 зі змінами на поточну дату, аспіранту Зозулі Є.С. зараховано 10 наукових публікацій, в яких висвітлено основні наукові результати дисертації. Встановлено, що в зарахованих публікаціях обґрунтовано отримані автором наукові результати відповідно до мети статті та висновків, а самі публікації відповідають темі дисертації.

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

Публікації у зарубіжних виданнях,

що входять до міжнародних наукометричних баз:

1. Zozulia Y., Pointwise estimates of solutions to weighted porous medium and fast diffusion equations via weighted Riesz potentials, Journal of Mathematical Sciences (United States), 2020, V. 248(2), P. 233 - 254. DOI: 10.1007/s10958-020-04872-4 (Q3 за SJR, зараховано як 2 наукові публікації).

2. Zozulia Y., On the continuity of solutions of the equations of a porous medium and the fast diffusion with weighted and singular lower-order terms, Journal of Mathematical Sciences, 2021, V. 256(6), P. 803–830. DOI: 10.1007/s10958-021-05462-8 (Q3 за SJR, зараховано як 2 наукові публікації).

3. Zozulia Y., Harnack's inequality for porous medium equation with singular absorption term, *Annali dell'Universita di Ferrara*, 2023, V. 69(2), P. 375–400. DOI: 10.1007/s11565-022-00438-1 (Q3 за SJR, зараховано як 2 наукові публікації).

4. Bychkov A.S., Hadzhy O.V., Zozulia Y.S., On the generalized weak Harnack inequality for non-negative super-solutions of quasilinear elliptic equations with absorption term, *Journal of Mathematical Sciences (United States)*, 2024, V. 21(1), P. 13-27. DOI: 10.1007/s10958-024-07165-2 (Q3 за SJR, зараховано як 1 наукова публікація).

Публікації у фахових виданнях України:

5. Зозуля Є., Неперервність та нерівність Гарнака для розв'язків вагового параболического рівняння з p -лапласіаном, яке містить сингулярний молодший член, *Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України*, 2021, Т. 35, № 1, С. 37–56. DOI: 10.37069/1683-4720-2021-35-4 (Фахове видання України категорії Б, зараховано як 1 наукова публікація).

6. Zozulia Y., Pointwise estimates of solutions to weighted parabolic p -Laplacian equation via Wolff potential, *Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України*, 2022, Т. 36, № 2, С. 72-87. DOI: 10.37069/1683-4720-2022-36-07 (Фахове видання України категорії Б, зараховано як 1 наукова публікація).

7. Скрипнік І.І., Зозуля Є.С., Поточкові оцінки розв'язків рівнянь зваженого пористого середовища та швидкої дифузії з використанням вагових потенціалів Рісса, *Буковинський математичний журнал* 2023, Т.11, №2, С. 254–256. DOI: 10.31861/bmj2023.02.25 (Фахове видання України категорії Б, зараховано як 1 наукова публікація).

8. Апробація матеріалів дисертації.

Результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на наступних міжнародних та всеукраїнських наукових конференціях:

1. Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу», 25 лютого - 1 березня 2019 р., м. Ворохта;

2. Міжнародна наукова конференція «Математика та інформаційні технології», присвяченої 55-річчю факультету математики та інформатики, 28–30 вересня 2023 р., м. Чернівці;

3. XIX Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука, 11–12 жовтня 2023 р., м. Київ;

4. Конференція молодих учених «Підстригачівські читання - 2024», 27–29 травня 2024 р., м. Львів.

Також результати роботи були представлені на наступних семінарах:

1. Розширеному науковому семінарі відділу нелінійного аналізу та рівнянь математичної фізики ІПММ НАН України, 4 жовтня 2021 р.;

2. Семінарі молодих вчених ІПММ НАН України", жовтень 2021 р.;

3. Семінарі кафедри математичної статистики і диференціальних рівнянь Львівського національного університету ім. Івана Франка, 13 вересня 2024 р.

9. Дотримання академічної доброчесності.

На підставі вивчення тексту дисертації здобувача, наукових праць здобувача та Протоколу контролю оригінальності (перевірку наявності текстових запозичень виконано в антиплагіатній системі *Strikeplagiarism.com*) встановлено, що дисертаційна робота виконана самостійно, текст дисертації не містить плагіату, а дисертація відповідає вимогам академічної доброчесності. Дисертація містить результати власних досліджень.

Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

10. Оцінка мови та стилю дисертації.

Матеріал дисертації викладено державною мовою, в логічній послідовності та доступній для сприйняття формі. Дисертація написана науковим стилем мовлення, з використанням коректної термінології, структура дисертації відповідає послідовності здійсненого автором дослідження. Дисертація складається з анотації, змісту, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел, який містить 171 найменування, та 1 додатку. Загальний обсяг дисертації становить 163 сторінки. Зазначені змістовні та структурні елементи дисертації відповідають вимогам Наказу Міністерства освіти і науки України від 12.01.2017 р. №40 «Про затвердження вимог до оформлення дисертації» зі змінами на поточну дату.

11. Відповідність змісту дисертації спеціальності з відповідної галузі знань, з якої вона подається до захисту.

За своїм фаховим спрямуванням і науковою новизною дисертаційна робота Зозулі Є.С. «Якісні властивості розв'язків вироджених еліптичних і параболічних рівнянь з сингулярними молодшими членами» відповідає спеціальності 111 Математика.

12. Результати обговорення та рекомендація дисертації до захисту.

Дисертаційна робота Зозулі Євгена Сергійовича «Якісні властивості розв'язків вироджених еліптичних і параболічних рівнянь з сингулярними молодшими членами» відповідає вимогам, передбаченим «Порядком присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», що затверджений Постановою Кабінету Міністрів України від 12.01.2022 № 44 зі змінами на поточну дату.

Результати дослідження були представлені на розширеному засіданні відділу нелінійного аналізу та рівнянь математичної фізики Інституту прикладної математики і механіки НАН України 10 грудня 2024 року, протокол №1 у формі презентації та наукової дискусії після її завершення. На розширеному засіданні були присутні 13 фахівців за напрямом дисертаційного дослідження, серед яких 6 докторів та 5 кандидатів наук, спеціальність присутніх на засіданні відповідає спеціальності 111 Математика. На розширеному засіданні науковими працівниками відділу було одногласно (6 голосів) ухвалено рішення рекомендувати дисертацію Зозулі Євгена Сергійовича на тему «Якісні властивості розв'язків вироджених еліптичних і параболічних рівнянь з сингулярними молодшими членами» до захисту у разовій спеціалізованій вченій раді для здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 Математика з галузі знань 11 Математика і статистика.

Головуючий на розширеному засіданні відділу,
радник при дирекції Інституту прикладної
математики і механіки НАН України,
член-кореспондент НАН України,
доктор фізико-математичних наук,
професор



Володимир ГУТЛЯНСЬКИЙ