

Національна академія наук України
Інститут прикладної математики і механіки

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Кузьміна Влада Олександрівна

УДК 517.9

ДИСЕРТАЦІЯ
НЕЛІНІЙНІ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ
КРАЙОВІ ЗАДАЧІ, НЕ РОЗВ'ЯЗАНІ
ВІДНОСНО ПОХІДНОЇ

Спеціальність 111 Математика
Галузь знань 11 Математика та статистика

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

Кузьміна
Влада
Олександрівна

Автор цифрового
підпису Кузьміна
Влада Олександрівна
Дата: 2024.12.23
19:22:46 +02'00'

В.О. Кузьміна

Науковий керівник:

Чуйко Сергій Михайлович,

доктор фізико-математичних наук,
професор

Черкаси — 2024

АНОТАЦІЯ

Кузьміна В.О. Нелінійні інтегро-диференціальні крайові задачі, не розв'язані відносно похідної. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 Математика (Галузь знань 11 Математика та статистика). Інститут прикладної математики і механіки Національної академії наук України, Черкаси, 2024.

Дисертація присвячена дослідженню проблем знаходження конструктивних умов існування та побудові розв'язків нелінійної крайової задачі для інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма з виродженим ядром. Для знаходження розв'язку нелінійної інтегро-диференціальної крайової задачі на основі модифікації метода Ньютона-Канторовича побудовано ітераційну схему із квадратичною збіжністю. Задля обґрунтування квадратичної збіжності методу Ньютона-Канторовича запропоновано оригінальні умови збіжності. Отримані результати перенесено на нелінійні крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма з виродженим ядром. Як приклади застосування запропонованих ітераційних схем, знайдені наближення до розв'язків нелінійних крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма з виродженим ядром. Основною відмінністю даної дисертації є знаходження конструктивних умов існування та побудова розв'язків нелінійної крайової задачі для інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма з виродженим ядром, взагалі кажучи, не розв'язаної відносно похідної.

Інтерес до вивчення інтегро-диференціальних систем пов'язаний з численними застосуваннями подібних систем в економіці, механіці, теорії керування, при вивченні динаміки популяцій а також, в обчислювальній нейробіології (модель Вільсона-Кована). Вивчення інтегро-диференціальних крайових задач пов'язане також із численними застосуваннями таких задач у теорії нелінійних коливань, у механіці, біології, радіотехніці, теорії керування, теорії стійкості руху. Характерна особливість крайових задач для

інтегро-диференціальних систем полягає у тому, що їх лінійна частина є оператором, який, взагалі кажучи, не має оберненого. Наслідком цього є суттєве ускладнення дослідження умов розв'язності та побудови розв'язків крайових задач для інтегро-диференціальних систем, в тому числі, інтегро-диференціальних крайових задач, не розв'язаних відносно похідної.

Метою дисертаційної роботи є визначення конструктивних умов існування та побудова алгоритмів знаходження розв'язків інтегро-диференціальної крайових задач для інтегро-диференціальних систем, в тому числі, інтегро-диференціальних крайових задач, не розв'язаних відносно похідної.

Об'єктом дослідження дисертаційної роботи є інтегро-диференціальні крайові задачі, не розв'язані відносно похідної, а також ітераційні схеми для знаходження наближень до розв'язків інтегро-диференціальної крайової задачі, не розв'язаної відносно похідної.

Для розв'язання поставлених задач у дисертаційній роботі були використані техніка псевдообернення (за Муром-Пенроузом) матриць і проєкторів, побудована Р. Муром і Р. Пенроузом і розвинена в роботах А.М. Самойленка та О.А. Бойчука, а також конструкції оператора Гріна задачі Коші та узагальненого оператора Гріна для лінійної крайової задачі для інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма з виродженим ядром, побудовані у статтях А.М. Самойленка, О.А. Бойчука та С.А. Кривошеї. Поставлена в роботі задача продовжує дослідження умов розв'язності лінійних нетерових крайових задач, наведених у монографіях А.М. Самойленка, М.В. Азбелева, В.П. Максимова, Л.Ф. Рахматулліної і О.А. Бойчука. Дослідження диференціально-алгебраїчних крайових задач тісно пов'язане з дослідженням матричних рівнянь Ляпунова та Сильвестра, розвинених у роботах П. Ланкастера, П. Беннера, О.А. Бойчука, С.А. Кривошеї та С.М. Чуйка.

З іншого боку, дослідження крайових задач для інтегральних рівнянь пов'язане з вивченням диференціально-алгебраїчних крайових задач, започаткованим у роботах К. Вейерштрасса, М.М. Лузіна та Ф.Р. Гантахера. Систематичному вивченню диференціально-алгебраїчних крайових задач присвячені роботи С. Кемпбелла, П. Беннера, Ю.Є. Бояринцева,

В.Ф. Чистякова, А.М. Самойленка, М.О. Перестюка, В.П. Яковця, О.А. Бойчука, А. Ілчманна та Т. Рейса.

Дисертаційна робота має теоретичний характер. Отримані результати можуть бути використані в подальших дослідженнях у якісній теорії диференціальних рівнянь, електроніці, механіці та теорії стійкості руху. Крім того, отримані результати успішно використовуються в навчальному процесі в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка, Донбаському державному педагогічному університеті, Донбаській державній машинобудівній академії та в аспірантурах Інституту математики НАН України та Інституту прикладної математики і механіки НАН України.

У вступі обґрунтовано актуальність теми, сформульовано мету дослідження, подано короткий аналіз сучасного стану проблем, які досліджуються в дисертації, а також наведено загальний опис отриманих результатів.

Перший розділ присвячено огляду наукових праць із теорії лінійних та нелінійних крайових задач для системи інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма з виродженим ядром, в тому числі, для матричних крайових задач. Продемонстровано доцільність дослідження нелінійних крайових задач для системи інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма з виродженим ядром за допомогою модифікованого методу Ньютона. Продемонстровано актуальність дослідження та вдосконалення класифікації лінійних та нелінійних крайових задач для системи інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма з виродженим ядром, які містять диференціально-алгебраїчний оператор.

У другому розділі досліджено задачу про побудову розв'язків нелінійної матричної крайової задачі для інтегро-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром, взагалі кажучи, не розв'язаної відносно похідної, яка узагальнює традиційні постановки задач для інтегро-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром.

Знайдені необхідні і достатні умови розв'язності, а також ітераційна схема для побудови розв'язків нелінійних інтегро-диференціальних крайових задач, які узагальнюють результати, отримані для лінійної інтегро-

диференціальної крайової задачі на випадок нелінійної підінтегральної вектор-функції. Продemonстровано ефективність дослідження нелінійних не критичних недовизначених інтегрально-диференціальних крайових задач за допомогою модифікованого методу Ньютона.

Знайдені необхідні і достатні умови розв'язності, а також конструкція узагальненого оператора Гріна лінійної крайової задачі для матричної інтегро-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром у критичному випадку. Знайдено умови розв'язності, а також конструкцію узагальненого оператора Гріна лінійної нетерової крайової задачі для матричної інтегро-диференціальної системи, яка узагальнює інтегрально-диференціальні системи типу Фредгольма з виродженим ядром. Знайдені умови розв'язності, а також конструкція узагальненого оператора Гріна крайової задачі для матричної інтегро-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром узагальнюють традиційні результати для нетерових крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь.

Запропоновані необхідні і достатні умови існування, а також конструкція розв'язку задачі, оберненої до задачі про знаходження розв'язку автономного інтегро-диференціального рівняння типу Фредгольма з виродженим ядром. Отримані необхідні і достатні умови існування, а також конструкція розв'язку задачі про відновлення двоточної крайової умови. Запропонована схема дослідження задачі, оберненої до задачі про знаходження розв'язку автономного інтегро-диференціального рівняння типу Фредгольма з виродженим ядром може бути перенесена на задачі, обернені до задачі про знаходження розв'язку інтегро-диференціального рівняння типу Фредгольма з виродженим ядром, які містять диференціально-алгебраїчний оператор.

Запропонована схема дослідження матричної інтегрально-диференціальної крайової задачі, не розв'язаної відносно похідної, суттєво відрізняється від техніки, основаної на використанні центральної канонічної форми і продовжує дослідження матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач без використання центральної канонічної форми.

У третьому розділі досліджено задачу про побудову розв'язків нелінійної крайової задачі для інтегро-диференціальної системи, не розв'язаної відносно похідної. Лінійна частина цієї інтегро-диференціальної крайової задачі для являє собою диференціально-алгебраїчну крайову задачу з матрицею при похідній, яку припускаємо прямокутною, або ж квадратною, але виродженою. Поставлена задача продовжує дослідження традиційної лінійної інтегро-диференціальної крайової задачі на випадок лінійної крайової задачі з прямокутною матрицею при похідній. Знайдені необхідні і достатні умови розв'язності, а також конструкція розв'язків лінійної нетерової крайової задачі для інтегро-диференціальної системи, не розв'язаної відносно похідної, як у критичному, так і у некритичному випадку.

Досліджено також задачу про побудову розв'язків нелінійної інтегро-диференціальної системи, не розв'язаної відносно похідної. Знайдені необхідні і достатні умови розв'язності, а також конструкція розв'язків нелінійної крайової задачі для інтегро-диференціальної системи, не розв'язаної відносно похідної у критичному та некритичному випадку.

У третьому розділі досліджено також задачу про побудову розв'язків нелінійної крайової задачі для інтегро-диференціальної системи з відхиленням аргументу, не розв'язаної відносно похідної. Актуальність дослідження нелінійних крайових задач з запізненням, пов'язана з широким застосуванням подібних задач в електроніці, теорії стійкості руху, біології та радіотехніці, теорії нелінійних коливань, фізиці, хімії. Крім того, дослідження нелінійних крайових задач з запізненням пов'язані з широким застосуванням подібних задач для моделювання впливу лікарських засобів на організм людини, а також моделюванням розвитку епідемії.

Знайдені умови розв'язності, а також конструкція розв'язків нелінійної інтегро-диференціальної крайової задачі з відхиленням аргументу, не розв'язаної відносно похідної.

Робота здійснювалась згідно з планами наукової роботи Інституту прикладної математики і механіки НАН України, Донбаського державного педагогічного університету та планом досліджень спільної із Донбаським державним педагогічним університетом міжвідомчої лабораторії

"Крайові задачі теорії диференціальних рівнянь" Інституту математики НАН України та пов'язана з тематичним планом фундаментальної науково-дослідної роботи "Конструктивні методи аналізу матричних крайових задач для систем диференціальних, диференціально-алгебраїчних та функціонально-диференціальних рівнянь і теорії наближень"(р/н 0118U003390), яка фінансувалась у 2018 – 2020 рр. із коштів державного бюджету України і виконувалась в Донбаському державному педагогічному університеті.

Робота здійснювалась також за підтримки міжнародних грантів. Зокрема, робота була підтримана Грантом від Європейської федерації академій наук та гуманітарних наук (ALLEA) EFDS-FL2-08, який виконувався протягом липня – грудня 2023 року. Крім того, отримані в дисертації результати були підтримані грантом "Constructive methods for reconstruction of nonlinear boundary-value problems with application in medical research and image reconstruction", який виконувався в рамках двосторонньої Угоди між Австрійською академією наук та Національною академією наук України у 2023 році.

Ключові слова: нелінійні крайові задачі; інтегро-диференціальні крайові задачі; матричні крайові задачі; задача Діріхле; системи диференціальних рівнянь; псевдообернені матриці; оператор Гріна; лінеаризовані крайові умови; запізнення; коливання; обмежені збурення; оцінки помилок; системи керування; стійкість; резонанс.

ABSTRACT

Kuzmina V.O. Nonlinear integrodifferential boundary value problems unsolved with respect to the derivative. — Qualification scientific work as a manuscript.

Thesis for the degree of Doctor of Philosophy in the specialty 111 Mathematics (Field of knowledge 11 Mathematics and Statistics). Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Cherkasy, 2024.

The thesis is devoted to the study of problems related to finding constructive conditions for existence and constructing solutions of a nonlinear boundary value problem for integrodifferential equations of Fredholm type with degenerate kernel. For finding the solution of the nonlinear integrodifferential boundary value problem, we construct an iterative scheme with quadratic convergence based on the modification of the Newton-Kantorovich method. To justify the quadratic convergence of the Newton-Kantorovich method, we propose original convergence conditions. The obtained results are transferred to nonlinear boundary value problems for integrodifferential equations of Fredholm type with degenerate kernel. As examples of the application of the proposed iterative schemes, we find approximations to the solutions of nonlinear boundary value problems for integrodifferential equations of Fredholm type with degenerate kernel. The main distinction of this thesis lies in finding constructive conditions for existence and constructing solutions of a nonlinear boundary value problem for integrodifferential equations of Fredholm type with degenerate kernel, which, generally speaking, is unsolved with respect to the derivative.

The interest in studying integrodifferential systems is associated with the numerous applications of such systems in economics, mechanics, control theory, population dynamics, as well as in computational neurobiology (e.g., the Wilson–Cowan model). The study of integrodifferential boundary value problems is also related to various applications in the theory of nonlinear oscillations, mechanics, biology, radio engineering, control theory, and the stability theory of motion.

A characteristic feature of boundary value problems for integrodifferential systems is that their linear part is an operator that, generally speaking, is not invertible. This significantly complicates the investigation of solvability conditions and the construction of solutions for boundary value problems for integrodifferential systems, including integrodifferential boundary value problems unsolved with respect to the derivative.

The aim of the thesis is to determine constructive conditions for the existence and construct algorithms for finding solutions to integrodifferential boundary value problems for integrodifferential systems, including integrodifferential boundary value problems unsolved with respect to the derivative.

The object of the research is integrodifferential boundary value problems unsolved with respect to the derivative, as well as iterative schemes for obtaining approximations to the solutions of integrodifferential boundary value problems unsolved with respect to the derivative.

To solve the problems addressed in the thesis, we employ the techniques of matrix pseudoinversion (as per Moore-Penrose) and projectors, developed by R. Moore and R. Penrose and further advanced in the works of A.M. Samoilenko and O.A. Boichuk. Additionally, we utilise the constructions of the Green's operator for the Cauchy problem and the generalized Green's operator for the linear boundary value problem for integrodifferential equations of Fredholm type with degenerate kernel, as presented in the articles by A.M. Samoilenko, O.A. Boichuk, and S.A. Kryvoshieia. The problem addressed in the thesis continues the study of solvability conditions for linear Noetherian boundary value problems outlined in the monographs by A.M. Samoilenko, M.V. Azbelev, V.P. Maksimov, L.F. Rakhmatullina, and O.A. Boichuk. The investigation of differential-algebraic boundary value problems is closely related to the study of Lyapunov and Sylvester matrix equations, which were explored in the works of P. Lancaster, P. Benner, O.A. Boichuk, S.A. Kryvoshieia, and S.M. Chuiko.

On the other hand, the study of boundary value problems for integral equations is closely related to the investigation of differential-algebraic boundary value problems, which originated in the works of K. Weierstrass, M.M. Luzin, and F.R. Gantmacher. Systematic research on differential-algebraic boundary

value problems has been conducted in the works of S. Campbell, P. Benner, Y.E. Boyaryntsev, V.F. Chistyakov, A.M. Samoilenko, M.O. Perestyuk, V.P. Yakovets, O.A. Boichuk, A. Ilchmann, and T. Reis.

The thesis is theoretical in nature. The results obtained can be applied in further studies in the qualitative theory of differential equations, electronics, mechanics, and motion stability theory. Moreover, the results have been successfully utilized in the educational process at Taras Shevchenko National University of Kyiv, Donbas State Pedagogical University, Donbas State Academy of Engineering, and in postgraduate programs at the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine and the Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine.

The introduction substantiates the relevance of the topic, formulates the research objective, provides a brief analysis of the current state of the problems studied in the thesis, and presents a general overview of the obtained results.

The first chapter is devoted to a review of scientific works on the theory of linear and nonlinear boundary value problems for systems of integrodifferential equations of Fredholm type with degenerate kernel, including matrix boundary value problems. We demonstrate the expediency of studying nonlinear boundary value problems for systems of integrodifferential equations of Fredholm type with degenerate kernel using a modified Newton's method. We highlight the relevance of investigating and refining the classification of linear and nonlinear boundary value problems for systems of integrodifferential equations of Fredholm type with degenerate kernel, which involve a differential-algebraic operator.

The second chapter investigates the problem of constructing solutions for a nonlinear matrix boundary value problem for an integrodifferential system of Fredholm type with degenerate kernel, which, in general, is unsolved with respect to the derivative and generalizes the traditional formulations of problems for such systems. Necessary and sufficient conditions for solvability are established, along with an iterative scheme for constructing solutions to nonlinear integrodifferential boundary value problems. These results generalize those obtained for linear integrodifferential boundary value problems to the case of a nonlinear

integrand vector function. We demonstrate the effectiveness of studying nonlinear non-critical underdetermined integrodifferential boundary value problems using a modified Newton's method. We find the necessary and sufficient solvability conditions, as well as the construction of a generalized Green's operator for a linear boundary value problem of a matrix integrodifferential system of Fredholm type with degenerate kernel in the critical case. We establish the solvability conditions and the construction of a generalized Green's operator for a linear Noetherian boundary value problem of a matrix integrodifferential system that generalizes integrodifferential systems of Fredholm type with degenerate kernel. The found solvability conditions and the construction of the generalized Green's operator for the boundary value problem of a matrix integrodifferential system of Fredholm type with degenerate kernel generalize the traditional results for Noetherian boundary value problems of ordinary differential equations. We propose the necessary and sufficient conditions for the existence of a solution, as well as the construction of a solution for the problem inverse to the problem of finding a solution to an autonomous integrodifferential equation of Fredholm type with degenerate kernel. We obtain the necessary and sufficient conditions for the existence of a solution, along with the construction of a solution for the problem of reconstructing a two-point boundary condition. The proposed investigation scheme for the problem inverse to the problem of finding a solution to an autonomous integrodifferential equation of Fredholm type with degenerate kernel can be extended to problems inverse to a problem of finding solutions of integrodifferential equations of Fredholm type with degenerate kernel that involve a differential-algebraic operator. The proposed investigation scheme for matrix integrodifferential boundary value problems unsolved with respect to the derivative significantly differs from the technique based on the use of the central canonical form. It extends the study of matrix differential-algebraic boundary value problems without relying on the central canonical form.

The third chapter examines the problem of constructing solutions for a nonlinear boundary value problem for an integrodifferential system that is unsolved with respect to the derivative. The linear part of this integrodi-

fferential boundary value problem represents a differential-algebraic boundary value problem with a matrix at the derivative, which is assumed to be either rectangular or square but degenerate. This problem extends the study of the traditional linear integrodifferential boundary value problem to the case of a boundary value problem with a rectangular matrix at the derivative. Necessary and sufficient solvability conditions, as well as the construction of solutions for the linear Noetherian boundary value problem for an integrodifferential system unsolved with respect to the derivative, are obtained for both the critical and non-critical cases. We also study the problem of constructing solutions for a nonlinear integrodifferential system unsolved with respect to the derivative. Necessary and sufficient solvability conditions, along with the construction of solutions for the nonlinear boundary value problem for an integrodifferential system unsolved with respect to the derivative, are established for both critical and non-critical cases. The third chapter also investigates the problem of constructing solutions for a nonlinear boundary value problem for an integrodifferential system with a deviated argument that is unsolved with respect to the derivative. The relevance of studying nonlinear boundary value problems with delay is associated with their wide application in electronics, motion stability theory, biology, radio engineering, the theory of nonlinear oscillations, physics, and chemistry. Moreover, the study of nonlinear boundary value problems with delay is closely related to their extensive application in modeling the effects of medications on the human body, as well as in modeling the spread of epidemics. We determine the solvability conditions and the construction of solutions for a nonlinear integrodifferential boundary value problem with a deviated argument, which is unsolved with respect to the derivative. The research was conducted in accordance with the scientific work plans of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine, Donbas State Pedagogical University, and the joint research plan of the interdepartmental laboratory "Boundary Value Problems in the Theory of Differential Equations" of the Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine and Donbas State Pedagogical University. It was also aligned with the thematic plan of the fundamental research project "Constructive Methods of Analyzing Matrix Boundary Value Problems

for Systems of Differential, Differential-Algebraic, and Functional-Differential Equations and Approximation Theory"(State Registration No. 0118U003390), funded by the state budget of Ukraine and carried out at Donbas State Pedagogical University during 2018 – 2020. The work was also supported by international grants. In particular, it was funded by a grant from the European Federation of Academies of Sciences and Humanities (ALLEA) EFDS-FL2-08, which was implemented from July to December 2023. Additionally, the results obtained in the thesis were supported by the grant "Constructive methods for reconstruction of nonlinear boundary-value problems with application in medical research and image reconstruction,"carried out in 2023 under a bilateral agreement between the Austrian Academy of Sciences and the National Academy of Sciences of Ukraine.

Keywords: nonlinear boundary value problems; integrodifferential boundary value problems; matrix boundary value problems; Dirichlet problem; systems of differential equations; pseudo-inverse matrices; Green's operator; linearised boundary conditions; delay; oscillations; bounded perturbations; estimation of errors; control systems; stability; resonance.

СПИСОК НАУКОВИХ ПРАЦЬ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

В яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. Chuiko, S.M., Chuiko, O.V., Kuz'mina, V.O.: Solutions of the boundary-value problem for a matrix integrodifferential equation with degenerate kernel. *Journal of Mathematical Sciences* 263, 341 – 349 (2022).
DOI: 10.1007/s10958-022-05929-2
2. Chuiko, S.M., Chuiko, O.V., Kuzmina, V.O.: Nonlinear integrodifferential boundary-value problems unsolvable with respect to the derivative. *Journal of Mathematical Sciences* 270, 385 – 395 (2023).
DOI: 10.1007/s10958-023-06352-x
3. Boichuk, O.A., Chuiko, S.M., Kuzmina, V.O.: Nonlinear integrodifferential boundary-value problems with deviating argument unsolved with respect to the derivative. *Ukrainian Mathematical Journal* 74, 1334 – 1347 (2023).
DOI: 10.1007/s11253-023-02139-0
4. Chuiko, S.M., Nesmelova, O.V., Kuz'mina, V.O.: Generalized Green's operator of the matrix integral-differential boundary value problem unsolved with respect to the derivative. *Journal of Mathematical Sciences* 276, 603 – 613 (2023) DOI: 10.1007/s10958-023-06785-4
5. Чуйко, С.М., Чуйко, О.В., Кузьміна, В.О.: Невироджені лінійні інтегрально-диференціальні крайові задачі, не розв'язані відносно похідної. *Буковинський математичний журнал* 8, 127-138 (2020).
DOI: 10.31861/bmj2020.02.12
6. Чуйко, С.М., Чуйко, О.С., Кузьміна, В.О.: Умови розв'язності задачі, оберненої до лінійного автономного інтегро-диференціального рівняння типу Фредгольма з виродженим ядром. *Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України* 36(1), 54 – 60 (2022).
DOI: 10.32782/1683-4720-2022-36-5

7. Чуйко, С.М., Чуйко, О.С., Кузьміна, В.О.: Положення рівноваги не-лінійних інтегрально-диференціальних крайових задач, не розв'язаних відносно похідної. Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України 37(1), 118-133 (2023). DOI: 10.37069/1683-4720-2023-37-11
8. Чуйко, С.М., Чуйко, О.С., Чечетенко, В.О.: Оператор Гріна матричної інтегрально-диференціальної крайової задачі. Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України 31, 151 – 162 (2017).
9. Chuiko, S.M., Chuiko, A.S., Chechetenko, V.O.: On of solving nonlinear Noether integral-differential boundary value problems by the of Newton–Kantorovich method. Uzhgorod Mathematical Papers 1 (32), 147 – 158 (2018). DOI: 10.31861/bmj2018.01.122.

Які засвідчують апробацію матеріалів дисертаційної роботи:

1. Чуйко, О., Чечетенко, В.: Узагальнений оператор Гріна матричної інтегрально-диференціальної крайової задачі. Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках й інформаційних технологіях», Чернівці, 114 (2018).
<http://fmi50.pp.ua/files/FMI50-Materials.pdf>
2. Chuiko S., Chuiko E., Kuzmina V.: Boundary value problems for systems of nonsingular integral-differential equations of Fredholm type with degenerate kernel. «International Workshop QUALITDE – 2020». Tbilisi, Georgia, 52 – 56 (2020).
https://rmi.tsu.ge/eng/QUALITDE-2020/Abstracts_workshop_2020.pdf
3. Чуйко, С.М., Кузьміна, В.О.: Слабконелінійні інтегрально-диференціальні крайові задачі. International Conference of Young Mathematicians. Kyiv, Ukraine, 78 (2021).
https://www.imath.kiev.ua/~young/youngconf2021/Abstracts_2021.pdf

4. Chuiko S., Kuzmina V.: Boundary value problems for systems of integral-differential equations of Fredholm type. «Mathematical Analysis, Differential Equations & Applications». Bishkek, Kyrgyz Republic, 30 (2021).
5. Chuiko S., Chuiko E., Kuzmina V.: Boundary value problems for systems of linear nonsingular integral-differential equations of Fredholm type with degenerate kernel. Матеріали математичного семінару пам'яті академіка НАН України А.М. Самойленка. Слов'янськ, 48-55 (2021).
6. Chuiko S., Kuzmina V.: On of solving nonlinear integral-differential boundary value problems by the of Newton-Kantorovich method. 5 International Scientific Conference «Differential equations and control theory». Kharkiv, 12 (2021).
https://appmath.univer.kharkov.ua/pdf/DECT2021/DECT2021_Book.pdf
7. Chuiko S., Chuiko A., Kuzmina V.: Boundary value problems for systems of singular integral-differential equations of Fredholm type. «International Workshop QUALITDE – 2021». Tbilisi, Georgia, 45 – 48 (2021).
https://rmi.tsu.ge/eng/QUALITDE-2021/Abstracts_workshop_2021.pdf
8. Boichuk, O.A., Chuiko, S.M., Kuz'mina, V.O.: Nonlinear boundary-value problems not solved with respect to the derivative with delay. «International Workshop on functional differential equations». Ariel, Israel, 11 – 12 (2022).
9. Чуйко С., Чуйко О., Кузьміна В.: Умови розв'язності задачі, оберненої до інтегро-диференціального рівняння Фредгольма з виродженим ядром. «Прикладна математика та інформаційні технології», присвячена 60-річчю кафедри прикладної математики та інформаційних технологій Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича. Чернівці, 88 – 91 (2022).
<http://www.amit60.fmi.org.ua/files/AMIT2022-Materials.pdf>
10. Boichuk, O.A., Chuiko, S.M., Kuz'mina, V.O.: Nonlinear integro-differential Fredholm type boundary value problems not solved with respect to

the derivative with delay. «International Workshop QUALITDE – 2022». Tbilisi, Georgia, 44 – 47 (2022).

https://rmi.tsu.ge/eng/QUALITDE-2022/Reports_workshop_2022.pdf

11. Boichuk, A.A., Chuiko, S.M., Kuzmina, V.O.: Nonlinear integro-differential boundary value problems Fredholm type not solved with respect to the derivative with delay in critical case. Математичний семінар до 85-річного ювілею академіка НАН України А.М. Самойленка. Магдебург, Німеччина, 31 – 34 (2023).
12. Чуйко, С.М., Чуйко, О.С., Кузьміна, В.О.: Умови розв'язності задачі, оберненої до інтегро-диференціального рівняння Фредгольма. Міжнародна конференція молодих математиків. Київ, 2023.
https://www.imath.kiev.ua/~young/youngconf2023/Abstracts_2023/DEMF/Chuiko-Kuzmina.pdf
13. Чуйко, С.М., Кузьміна, В.О.: Положення рівноваги нелінійних періодичних інтегрально-диференціальних крайових задач, не розв'язаних відносно похідної. Міжнародна наукова конференція «Математика та інформаційні технології», присвячена 55-річчю факультету математики та інформатики, Чернівці, 342 – 343 (2023).
<https://fmi.chnu.edu.ua/media/qhufs0d5/materialy-mizhnorodnoi-naukovoi-konferentsii-fmi55.pdf>
14. Чуйко, С.М., Кузьміна, В.О.: Інтегрально-диференціальні крайові задачі, не розв'язані відносно похідної. XXI International Scientific Practical Conference «Shevchenkivska Vesna - 2024» Kyiv, Ukraine, 57 – 58 (2024).
https://probability.knu.ua/shv2024/ShV_2024.pdf

Зміст

Зміст	18
ВСТУП	20
1 Необхідні відомості з теорії інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма з виродженим ядром	27
1.1. Крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма з виродженим ядром	27
1.2. Модифікація методу Ньютона	34
Висновки до першого розділу	38
2 Умови розв'язності інтегро-диференціальної крайової задачі	39
2.1. Умови розв'язності нелінійної інтегро-диференціальної крайової задачі	39
2.2. Розв'язки крайової задачі для матричного інтегро-диференціального рівняння з виродженим ядром	47
2.3. Узагальнений оператор Гріна матричної інтегрально-диференціальної крайової задачі, не розв'язаної відносно похідної .	55
2.4. Умови розв'язності задачі, оберненої до автономного інтегро-диференціального рівняння	66
Висновки до другого розділу	71
3 Нелінійні інтегро-диференціальні крайові задачі, не розв'язані відносно похідної	72

3.1. Невироджені інтегро-диференціальні крайові задачі, не розв'язані відносно похідної	72
3.2. Нелінійні інтегро-диференціальні крайові задачі, не розв'язані відносно похідної	82
3.3. Положення рівноваги нелінійних інтегро-диференціальних крайових задач, не розв'язаних відносно похідної	92
3.4. Нелінійні інтегро-диференціальні крайові задачі з відхиленням аргументу, не розв'язані відносно похідної	105
Висновки до третього розділу	120
ВИСНОВКИ	121
Бібліографія	122
Додаток	139

ВСТУП

Інтерес до вивчення інтегро-диференціальних систем пов'язаний з численними застосуваннями подібних систем в економіці, механіці, теорії керування, а також, при вивченні динаміки популяцій. Характерною особливістю задачі Коші для лінійної інтегро-диференціальної системи, а також суттєвою відмінністю її від традиційної задачі Коші для лінійної інтегро-диференціальної системи, є, взагалі кажучи, її нерозв'язність для довільної неоднорідності і довільного початкового значення; у випадку розв'язності задачі Коші для лінійної інтегро-диференціальної системи, не розв'язаної відносно похідної, її розв'язок, у загальному випадку залежить від довільної неперервної вектор-функції.

У роботі запропоновано оригінальні умови розв'язності, а також схему знаходження розв'язків лінійної нетерової інтегро-диференціальної крайової задачі, не розв'язаної відносно похідної, при цьому істотно використовується техніка псевдообернення матриць за Муром–Пенроузом [2, 35, 36, 61, 78, 80, 89, 103, 107, 108, 110, 128]. Поставлена в роботі задача продовжує дослідження умов розв'язності лінійних нетерових крайових задач, наведених у монографіях А.М. Самойленка, М.В. Азбелева, В.П. Максимова, Л.Ф. Рахматулліної і О.А. Бойчука [2, 6, 24]. Дослідження диференціально-алгебраїчних крайових задач тісно пов'язане з дослідженням матричних рівнянь Ляпунова та Сильвестра [3, 13], розвинених у роботах О.А. Бойчука, С.А. Кривошеї та С.М. Чуйка [32, 138, 139].

З іншого боку, дослідження крайових задач для інтегральних рівнянь пов'язане з вивченням диференціально-алгебраїчних крайових задач, започаткованим у роботах К. Вейерштрасса, М.М. Лузіна та Ф.Р. Гантмахера [78, 124]. Систематичному вивченню диференціально-алгебраїчних крайових

вих задач присвячені роботи С. Кемпбелла, Ю.Є. Бояринцева, В.Ф. Чистякова, А.М. Самойленка, М.О. Перестюка, В.П. Яковця, О.А. Бойчука, А. Ілчманна та Т. Рейса [40, 45, 136]. У роботі досліджено загальний випадок, коли лінійний обмежений оператор, відповідний до однорідної частини лінійної нетерової диференціально-алгебраїчної крайової задачі, не має оберненого. У роботі побудовано узагальнений оператор Гріна лінійної інтегро-диференціальної крайової задачі, не розв'язаної відносно похідної.

Обґрунтування теми дослідження. Інтерес до вивчення інтегро-диференціальних систем пов'язаний з численними застосуваннями подібних систем в економіці, механіці, теорії керування, при вивченні динаміки популяцій, а також, в обчислювальній нейробіології (модель Вільсона–Кована) [125, 127]. Вивчення інтегро-диференціальних крайових задач пов'язане також із численними застосуваннями таких задач у теорії нелінійних коливань, механіці, біології, радіотехніці, теорії керування, теорії стійкості руху [30, 39, 40, 41, 42, 43, 45, 85, 99, 100, 101, 132, 133, 134]. Характерна особливість крайових задач для інтегро-диференціальних систем полягає у тому, що їх лінійна частина є оператором, який, взагалі кажучи, не має оберненого. Наслідком цього є суттєве ускладнення дослідження умов розв'язності та побудови розв'язків крайових задач для інтегро-диференціальних систем, в тому числі, інтегро-диференціальних крайових задач, не розв'язаних відносно похідної.

Мета і завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є визначення конструктивних умов існування та побудова алгоритмів знаходження розв'язків інтегро-диференціальної крайової задачі, не розв'язаної відносно похідної.

Об'єктом дослідження дисертаційної роботи є інтегро-диференціальні крайові задачі, не розв'язані відносно похідної, а також ітераційні схеми для знаходження наближень до розв'язків інтегро-диференціальної крайової задачі, не розв'язаної відносно похідної.

Предметом дослідження дисертаційної роботи є конструктивні умо-

ви існування та алгоритми знаходження розв'язків інтегро-диференціальної крайової задачі, не розв'язаної відносно похідної.

Методи дослідження. У роботі суттєво використовується апарат псевдообернення (за Муром–Пенроузом) матриць [2, 36, 78, 118, 120], конструкції узагальнених операторів Гріна, побудовані в роботах А.М. Самойленка та О.А. Бойчука [24] та методи розв'язання матричних рівнянь Ляпунова та Сильвестра [3, 13], побудовані в роботах О.А. Бойчука, С.А. Кривошеї та С.М. Чуйка [32, 138, 139, 140], метод найменших квадратів, розвинений для лінійних крайових задач у роботах М.П. Кравчука та Н.І. Ахієзера [5, 135]. Використовується також метод Ньютона та його узагальнення — метод Ньютона–Канторовича [14, 55, 88, 104]. При розв'язанні проблем регуляризації некоректно поставлених лінійних матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач суттєво використовується метод регуляризації некоректно поставлених крайових задач, розвинутий у роботах С.Г. Крейна, А.М. Тихонова, В.Я. Арсеніна та школою професора М.В. Азбелева. Різним аспектам теорії крайових задач присвячені роботи А.М. Самойленка, М.О. Перестюка, І.Т. Кігурадзе, Є.О. Гребенікова, Ю.О. Рябова, О.А. Бойчука, М.Й. Ронто, В.П. Яковця та багатьох інших вчених [1, 11, 36, 37, 94, 102, 109, 111, 153, 154, 155].

Серед іноземних вчених теорії крайових задач присвячені роботи таких науковців як P. Benner, G.D. Birkhoff, G.A. Bliss, D. Bainov, R. Conti, J. Hale, W.T. Reid, O. Veivoda, S. Schwabik, T. Vogel, D. Wexler [15, 16, 17, 18, 75, 93, 115, 117, 122, 123, 126, 129], зокрема, теорії крайових задач для диференціально-алгебраїчних рівнянь: S.L. Campbell, P. Benner [17, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 85, 95]. Ці методи застосовуються при аналізі інтегро-диференціальної крайової задачі, не розв'язаної відносно похідної.

Наукова новизна отриманих результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну та виносяться на захист, наступні:

1. У роботі знайдено конструктивні умови існування розв'язку нелінійної інтегро-диференціальної крайової задачі, не розв'язаної відносно похідної. Для знаходження розв'язку нелінійної інтегро-диференціальної

крайової задачі, не розв'язаної відносно похідної, на основі модифікації метода Ньютона–Канторовича побудовано ітераційну схему із квадратичною збіжністю.

2. Задля обґрунтування квадратичної збіжності модифікованого методу Ньютона–Канторовича у випадку недовизначеної системи запропоновано оригінальні умови збіжності. Отримані результати перенесено на нелінійні інтегро-диференціальні крайові задачі, не розв'язані відносно похідної, в тому числі, на інтегро-диференціальні крайові задачі з відхиленням аргументу.
3. Як приклади застосування запропонованих ітераційних схем, знайдені наближення до розв'язків нелінійних інтегро-диференціальних крайових задач, не розв'язаних відносно похідної. Продемонстровано, що точність знайдених за методом простих ітерацій наближень до розв'язку задачі Коші для нелінійного інтегро-диференціального рівняння, не розв'язаного відносно похідної, значно менша, ніж точність наближень до розв'язку задачі Коші для нелінійного диференціально-алгебраїчного рівняння, знайдених за допомогою методу Ньютона.

Особистий внесок здобувача. Результати, які увійшли до дисертації отримані автором самостійно. Постановка задач у різних розділах проводилась спільно з О.А. Бойчуком, С.М. Чуйком, О.С. Чуйком, О.В. Чуйко та О.В. Несмеловою. Із результатів, надрукованих у сумісних статтях, у дисертацію ввійшли тільки такі, що отримані здобувачем самостійно. Співавторам належить участь у постановці задач, консультації з вибору методології дослідження, обговорення отриманих результатів та висновків.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у 9 наукових статтях, з них, 4 статті у наукових виданнях, що індексуються в міжнародних наукометричних базах Scopus та/або Web of Science, 3 статті у фахових виданнях України та 2 статті у нефархових виданнях України. Крім того, результати дисертації оприлюднено у 14 тезах доповідей на наукових кон-

ференціях й семінарах в Україні та за кордоном, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідались та обговорювались на:

1. Спільному засіданні семінару Інституту прикладної математики і механіки НАН України та кафедри математики та інформатики Донбаського державного педагогічного університету присвяченому 80-річчю академіка НАН України А.М. Самойленка, Слов'янськ, 5 березня 2018 р.;
2. Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках й інформаційних технологіях», Чернівці, 17–19 вересня 2018 р.;
3. International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations «QUALITDE – 2020», Tbilisi, Georgia, December 19–21, 2020;
4. International conference International Conference of Young Mathematicians, 2021, Kyiv, Ukraine, June 3–5;
5. International conference «Mathematical Analysis, Differential Equations & Applications», Bishkek, Kyrgyz Republic, June 21–25, 2021;
6. Спільному засіданні семінару Інституту прикладної математики і механіки НАН України та кафедри математики та інформатики Донбаського державного педагогічного університету, пам'яті академіка НАН України А.М. Самойленка, Слов'янськ, 16 квітня 2021 р.;
7. International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations «QUALITDE – 2021», Tbilisi, Georgia, December 18–20, 2021;
8. International Workshop on functional differential equations – 2022, Ariel, Israel, September 18–24, 2022;

9. Міжнародній науковій конференції «Прикладна математика та інформаційні технології», присвячена 60-річчю кафедри прикладної математики та інформаційних технологій Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, Чернівці, 22-24 вересня 2022 р.;
10. International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations «QUALITDE – 2022», Tbilisi, Georgia, December 17–19, 2022;
11. Математичному семінарі до 85-річного ювілею академіка НАН України А.М.Самойленка (02.01.1938 — 04.12.2020), Магдебург, Німеччина, 2 січня 2023 р.;
12. Міжнародній конференції молодих математиків, Київ, 1–3 червня 2023 р.;
13. Міжнародній науковій конференції «Математика та інформаційні технології», присвяченій 55-річчю факультету математики та інформатики, Чернівці, 28 — 30 вересня 2023 р.;
14. XXI International scientific–practical conference «Shevchenkivska vesna – 2024», Kyiv, April 11, 2024.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації, вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел, який містить 155 найменування та додатку. Повний обсяг роботи становить 142 сторінки.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, грантами. Робота здійснювалась згідно з планами наукової роботи Інституту прикладної математики і механіки НАН України, Донбаського державного педагогічного університету та планом досліджень спільної із Донбаським державним педагогічним університетом міжвідомчої лабораторії "Крайові задачі теорії диференціальних рівнянь" Інституту математики НАН України та пов'язана з тематичним планом фундаментальної науково-дослідної роботи "Конструктивні методи аналізу матричних крайових за-

дач для систем диференціальних, диференціально-алгебраїчних та функціонально-диференціальних рівнянь і теорії наближень" (р/н 0118U003390), яка фінансувалась у 2018 – 2020 рр. із коштів державного бюджету України і виконувалась в Донбаському державному педагогічному університеті.

Робота здійснювалась також за підтримки міжнародних грантів. Зокрема, робота була підтримана Грантом від Європейської федерації академій наук та гуманітарних наук (ALLEA) EFDS-FL2-08, який виконувався протягом липня – грудня 2023 року. Крім того, отримані в дисертації результати були підтримані грантом "Constructive methods for reconstruction of nonlinear boundary-value problems with application in medical research and image reconstruction", який виконувався в рамках двосторонньої Угоди між Австрійською академією наук та Національною академією наук України у 2023 році.

Практичне та теоретичне значення одержаних результатів, пропозиції щодо використання наукових результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Отримані результати можуть бути використані в подальших дослідженнях у якісній теорії диференціальних рівнянь, електроніці, механіці та теорії стійкості руху. Крім того, отримані результати успішно використовуються в навчальному процесі в Донбаському державному педагогічному університеті. Отримані результати можуть бути використані в навчальних курсах з теорії диференціально-алгебраїчних та інтегро-диференціальних крайових задач для студентів класичних, педагогічних і технічних університетів.

Автор висловлює щире подяку науковому керівнику — доктору фізико-математичних наук, професору Сергію Михайловичу Чуйку за постійну увагу до роботи та обговорення одержаних результатів.

Розділ 1

Необхідні відомості з теорії інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма з виродженим ядром

1.1. Крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма з виродженим ядром

Розглянемо задачу про побудову розв'язку [36, 113]

$$y(t) \in \mathbb{D}^2[a; b], \quad y'(t) \in \mathbb{L}^2[a; b]$$

лінійної інтегро-диференціальної системи

$$y'(t) = \Phi(t) \int_a^b \left[A(s)y(s) + B(s)y'(s) \right] ds + f(t), \quad (1.1)$$

підпорядкованого крайовій умові

$$\ell y(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^p, \quad n \neq p. \quad (1.2)$$

Тут

$$A(t), B(t) \in \mathbb{L}_{m \times n}^2[a; b] := \mathbb{L}^2[a; b] \otimes \mathbb{R}^{m \times n},$$

$$\Phi(t) \in \mathbb{L}_{n \times m}^2[a; b], \quad f(t) \in \mathbb{L}^2[a; b];$$

$\ell y(\cdot) : \mathbb{D}^2[a; b] \rightarrow \mathbb{R}^p$ — лінійний обмежений векторний функціонал, визначений на просторі $\mathbb{D}^2[a; b]$ n -вимірних абсолютно неперервних па відрізка $[a, b]$

функцій. Поставлена задача була розв'язана у статті [113], як продовження дослідження лінійних інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма з виродженим ядром.

Розв'язок системи лінійних інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма (1.1) шукаємо у вигляді

$$y(t, c) = \Psi_0(t) c + \varphi(t), \quad \varphi(t) := \int_a^b f(s) ds;$$

тут

$$\Psi(t) := \int_a^t \Phi(s) ds, \quad c := \text{col}(c_0, c_1), \quad c_0 \in \mathbb{R}^m, \quad c_1 \in \mathbb{R}^n,$$

крім того

$$\Psi_0(t) := \begin{bmatrix} \Psi(t) ; I_n \end{bmatrix}.$$

Невідому константу c визначає рівняння [113]

$$D c = \check{b}; \tag{1.3}$$

тут

$$D := \begin{bmatrix} I_m - \int_a^b [A(s)\Psi(s) + B(s)\Phi(s)] ds ; - \int_a^b A(s) ds \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times (m+n)},$$

крім того

$$\check{b} := \int_a^b \begin{bmatrix} A(s)\varphi(s) + B(s)f(s) \end{bmatrix} ds \in \mathbb{R}^m.$$

Рівняння (1.3) розв'язне тоді й тільки тоді, коли виконується умова

$$P_D^* \check{b} = 0; \tag{1.4}$$

при цьому ρ -параметрична сім'я розв'язків рівняння (1.3) має вигляд

$$c = D^+ \check{b} + P_{D_\rho} c_\rho, \quad c_\rho \in \mathbb{R}^\rho.$$

Тут

$$P_{D^*} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{N}(D^*)$$

— ортопроектор матриці $D^* \in \mathbb{R}^{(m+n) \times m}$, D^+ — псевдообернена (за Муром – Пенроузом) матриця [36]; матриця $P_{D_\rho} \in \mathbb{R}^{(m+n) \times \rho}$ утворена з ρ лінійно-незалежних стовпців матриці-ортопроектора $P_D : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{N}(D)$. Таким

чином, за умови (1.4) розв'язок системи лінійних інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма (1.1) має вигляд

$$y(t, c_\rho) = \Psi_0(t)P_{D_\rho}c_\rho + \Psi_0(t)D^+\check{b}, \quad c_\rho \in \mathbb{R}^\rho.$$

Таким чином, доведено наступне твердження [113].

Лема 1.1.1. *За умови (1.4) розв'язок системи лінійних інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма (1.1) має вигляд*

$$y(t, c_\rho) = X(t)c_\rho + K[f(s)](t), \quad X(t) := \Psi_0(t)P_{D_\rho}, \quad c_\rho \in \mathbb{R}^\rho.$$

Тут $X(t)$ — матриця, яка визначає загальний розв'язок однорідної частини системи лінійних інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма (1.1) та

$$K[f(s)](t) := \Psi_0(t)D^+\check{b}$$

— оператор Гріна задачі Коші для системи лінійних інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма (1.1).

Аналогічне твердження було доведено у статті [113] з використанням задачі, спряженої до задачі Коші для системи лінійних інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма (1.1).

Позначимо матрицю

$$Q := \ell X(\cdot) \in \mathbb{R}^{p \times \rho}$$

та її ортопроектори

$$P_Q : \mathbb{R}^\rho \rightarrow \mathbb{N}(Q), \quad P_{Q^*} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{N}(Q^*).$$

Припустимо, що для крайової задачі для системи лінійних інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма (1.1), (1.2) має місце критичний випадок ($P_{Q^*} \neq 0$) і виконується умова

$$P_{Q_d^*} \left\{ \alpha - \ell K \left[f(s) \right] (\cdot) \right\} = 0; \quad (1.5)$$

при цьому лінійна інтегро-диференціальна крайова задача (1.1), (1.2) має r -параметричний розв'язок [113]

$$y(t, c_r) = X(t)P_{Q_r}c_r + X(t)Q^+ \left\{ \alpha - \ell K[f(s)](\cdot) \right\} + K[f(s)](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

Тут $X_r(t) := X(t)P_{Q_r}$; матриця $P_{Q_r} \in \mathbb{R}^{\rho \times r}$, утворена з r лінійно-незалежних стовпців матриці-ортопроектора P_Q . Матриця $P_{Q_d^*} \in \mathbb{R}^{d \times p}$, утворена з d лінійно-незалежних рядків матриці-ортопроектора P_{Q^*} . Таким чином, доведено наступне твердження [113].

Теорема 1.1.1. *Припустимо, що для крайової задачі для системи лінійних інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма (1.1), (1.2) має місце критичний випадок ($P_{Q^*} \neq 0$). За умов (1.4) та (1.5) лінійна інтегро-диференціальна крайова задача (1.1), (1.2) має r -параметричний розв'язок*

$$y(t, c_r) = X_r(t)c_r + G \left[f(s); \alpha \right](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

який зображується за допомогою оператора Гріна

$$G[f(s); \alpha](t) := X(t)Q^+ \left\{ \alpha - \ell K[f(s)](\cdot) \right\} + K[f(s)](t).$$

Тут $X_r(t) := X(t)P_{Q_r}$ — матриця, яка визначає загальний розв'язок однорідної частини інтегро-диференціальної крайової задачі (1.1), (1.2).

Доведене твердження є узагальненням отриманого у статті [113] результату для умов розв'язності задачі Коші для системи лінійних інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма (1.1).

Приклад 1.1.1. *Доведена теорема 1.1.1 справджується у задачі про побудову періодичного розв'язку лінійної інтегро-диференціальної системи [113]*

$$y'(t) = \Phi(t) \int_0^{2\pi} A(s)y(s) ds + f(t). \quad (1.6)$$

Тут

$$\Phi(t) := \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad A(t) := \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix},$$

$$f(t) := \begin{pmatrix} \cos 2t + \sin 2t \\ -\cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix}.$$

Для лінійної інтегро-диференціальної системи (1.6) має місце рівність $\check{b} = 0$, отже умова (1.4) виконується, при цьому має місце критичний випадок: $P_{Q^*} \neq 0$. Умова (1.5) виконується, при цьому задача про побудову періодичного розв'язку лінійної інтегро-диференціальної системи (1.6) має розв'язок

$$y(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); 0](t), \quad X_r(t) = \begin{pmatrix} \cos t - 1 & 1 & 0 \\ \sin t & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad c_r \in \mathbb{R}^3,$$

який зображується за допомогою оператора Гріпа

$$G[f(s); 0](t) = K[f(s)](t) = \begin{pmatrix} (\cos t + \sin t) \sin t \\ (-\cos t + \sin t) \sin t \end{pmatrix}.$$

Наслідок 1.1.1. *Припустимо, що для крайової задачі для системи лінійних інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма (1.1), (1.2) має місце некритичний випадок ($P_{Q^*} \neq 0$). За умови (1.5) лінійна інтегро-диференціальна крайова задача (1.1), (1.2) має r -параметричний розв'язок*

$$y(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \alpha](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

який зображується за допомогою оператора Гріна

$$G[f(s); \alpha](t) := X(t)Q^+ \left\{ \alpha - \ell K[f(s)](\cdot) \right\} + K[f(s)](t).$$

Тут $X_r(t) := X(t)P_{Q_r}$ — матриця, яка визначає загальний розв'язок однорідної частини інтегро-диференціальної крайової задачі (1.1), (1.2).

Приклад 1.1.2. *Наслідок 1.1.1 справджується у задачі про побудову антиперіодичного розв'язку лінійної інтегро-диференціальної системи*

$$y'(t) = \Phi(t) \int_0^{2\pi} \left[A(s)y(s) + B(s)y'(s) \right] ds + f(t). \quad (1.7)$$

Тим

$$\Phi(t) := \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad A(t) := \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix},$$

$$B(t) := \begin{pmatrix} \sin t & 0 \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix}, \quad f(t) := \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix}.$$

Для лінійної інтегро-диференціальної системи (1.7) має місце рівність $\check{b} = 0$, отже умова (1.4) виконується, при цьому має місце не критичний випадок: $P_{Q^*} = 0$. Задача про побудову періодичного розв'язку лінійної інтегро-диференціальної системи (1.7) має єдиний розв'язок

$$y(t) = G[f(s); 0](t),$$

який зображується за допомогою оператора Гріпа

$$G[f(s); 0](t) = K[f(s)](t) = \begin{pmatrix} \cos t \sin t \\ \sin^2 t \end{pmatrix}.$$

Доведене твердження навідміну від результату, отриманого у статті [113] для умов розв'язності задачі Коші для системи лінійних інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма (1.1) не містить параметра, який визначає розв'язність задачі Коші. Тому постає задача про знаходження умов розв'язності задачі Коші для системи лінійних інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма (1.1), залежних від деякого власного вектора, який визначає розв'язність задачі Коші. Так саме постає задача про знаходження умов розв'язності крайової задачі для системи лінійних інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма (1.1), залежних від деякого власного вектора, який визначає розв'язність цієї задачі.

Запропонована у статті [113] схема дослідження крайових задач інтегро-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром аналогічно [31] може бути перенесена на нелінійні інтегро-диференціальні системи типу Фредгольма з виродженим ядром, а також аналогічно [34, 40] — на матричні крайові задачі для інтегро-диференціальних систем типу Фредгольма з виродженим ядром, які містять диференціально-алгебраїчний оператор. З

іншого боку, у разі нерозв'язності крайові задачі для інтегро-диференціальних систем типу Фредгольма з виродженим ядром можуть бути регуляризовані аналогічно [53]. Для розв'язання нелінійних інтегро-диференціальних системи типу Фредгольма з виродженим ядром стан у нагоді модифікація методу Ньютона [55].

1.2. Модифікація методу Ньютона

Розглянемо задачу про побудову розв'язків нелінійного рівняння

$$\varphi(z) = 0. \quad (1.8)$$

Функцію $\varphi(z) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \neq n$ вважаємо двічі неперервно диференційовною по z в області $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Для знаходження розв'язку $\tilde{z} \in \mathbb{R}^n$ нелінійного рівняння (1.8) побудуємо модифікацію класичного методу Ньютона [23, 76, 88]. Припустимо, що знайдено наближення z_k , досить близьке до точного розв'язку $\tilde{z} \in \mathbb{R}^n$ рівняння (1.8). Розвинемо функцію $\varphi(z)$ в околі точного розв'язку

$$\varphi(\tilde{z}) = \varphi(z_k) + \varphi'(z_k, \varepsilon)(\tilde{z} - z_k) + R(\xi_k, \tilde{z} - z_k), \quad (1.9)$$

де

$$R(\xi_k, \tilde{z} - z_k) := \int_0^1 (1-s) d^2\varphi(\xi_k; \tilde{z} - z_k) ds;$$

тут ξ_k — точка, розташована між точками $\tilde{z}$ та z_k . У малому околі точного розв'язку має місце наближена рівність $\varphi(z_k) + \varphi'(z_k)(\tilde{z} - z_k) \approx 0$, тому для знаходження наступного наближення z_{k+1} до точного розв'язку природно покласти

$$\varphi(z_k) + \varphi'(z_k)(z_{k+1} - z_k) = 0, \quad (1.10)$$

звідки, за умови

$$P_{J_k^*} = 0, \quad J_k := \varphi'(z_k) \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad (1.11)$$

знаходимо

$$z_{k+1} = z_k - J_k^+ \varphi(z_k). \quad (1.12)$$

Тут $P_{J_k^*} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{N}(J_k^*)$ — ортопроектор матриці $J_k^* \in \mathbb{R}^{n \times m}$, J_k^+ — псевдообернена (за Муром – Пенроузом) матриця [36]. Зазначимо, що умова (1.11) рівнозначна вимозі повноти рангу матриці J_k і виконується лише у випадку $m \leq n$. Ітераційна схема (1.12) збігається до точного розв'язку $\tilde{z}$. Дійсно, припустимо, що в околі точного розв'язку $\tilde{z}$ мають місце нерівності

$$\|J_k^+\| \leq \sigma_1(k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad \|d^2\varphi(\xi_k; \tilde{z} - z_k)\| \leq \sigma_2(k) \cdot \|\tilde{z} - z_k\|^2.$$

Із рівностей (1.9) и (1.10) випливає, що

$$\|\tilde{z} - z_{k+1}\| \leq \frac{\sigma_1(k)\sigma_2(k)}{2} \cdot \|\tilde{z} - z_k\|^2.$$

Припустимо, що існує константа

$$\theta := \sup_{k \in N} \left\{ \frac{\sigma_1(k)\sigma_2(k)}{2} \right\}.$$

За цієї умови має місце оцінка $|\tilde{z} - z_{k+1}| \leq \theta \cdot |\tilde{z} - z_k|^2$, яка свідчить, що у випадку збіжності ітераційної схеми (1.12) до точного розв'язку $\tilde{z}$ рівняння (1.8), ця збіжність — квадратична. Знайдемо умову збіжності ітераційної схеми (1.12) до точного розв'язку $\tilde{z}$ рівняння (1.8); для цього зробимо наступні оцінки

$$|\tilde{z} - z_1| \leq \theta \cdot |\tilde{z} - z_0|^2, \quad |\tilde{z} - z_2| \leq \theta^{1+2} \cdot |\tilde{z} - z_0|^{2^2}, \quad \dots,$$

$$|\tilde{z} - z_k| \leq \theta^{1+2+2^2+\dots+2^{k-1}} \cdot |\tilde{z} - z_0|^{2^k}, \quad \dots$$

Таким чином, має місце нерівність [76]

$$|\tilde{z} - z_k| \leq \theta^{\frac{2^k-1}{2-1}} \cdot |\tilde{z} - z_0|^{2^k} = \frac{1}{\theta} \cdot (\theta \cdot |\tilde{z} - z_0|)^{2^k},$$

яка свідчить про збіжність ітераційної схеми (1.12) до точного розв'язку $\tilde{z}$ рівняння (1.8) за умови

$$\theta \cdot |\tilde{z} - z_0| < 1. \tag{1.13}$$

Таким чином, доведено наступне твердження [55].

Лема 1.2.1. *Припустимо, що для рівняння (1.8) виконуються наступні умови*

1. *Нелінійна вектор-функція $\varphi(z)$, двічі неперервно диференційовна по z в області $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, в околі точки z_0 має корінь z^* .*
2. *В околі нульового наближення $z_0 \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ мають місце нерівності*

$$\|J_k^+\| \leq \sigma_1(k), \|d^2\varphi(\xi_k; \tilde{z} - z_k)\| \leq \sigma_2(k) \cdot \|\tilde{z} - z_k\|.$$

3. Існує константа

$$\theta := \sup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{\sigma_1(k)\sigma_2(k)}{2} \right\}.$$

Тоді за умов (1.11) та (1.13) для знаходження розв'язку z^* рівняння (1.8) застосовна ітераційна схема (1.12), при цьому швидкість збіжності послідовності $\{z_k\}$ до розв'язку z^* рівняння (1.8) квадратична.

Доведена лема [55] узагальнює відповідні результати [76, 88] на випадок виродженої, або прямокутної матриці J_k і стане в нагоді у теорії нелінійних нетерових крайових задач [36, 54].

Приклад 1.2.1. Ітераційна схема (1.12) застосовна для знаходження розв'язку нелінійного рівняння (1.8), де вектор-функція

$$\varphi(u) := \begin{pmatrix} x + \sin y + \cos z \\ y + \sin z + \cos x \end{pmatrix}, \quad u := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Дана вектор-функція $\varphi(u) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ визначена у довільній області $D \subset \mathbb{R}^3$ і двічі неперервно диференційовна по z в околі $\Omega \subseteq D \subset \mathbb{R}^3$. Покладемо

$$u_0 := \begin{pmatrix} -0,45 & -0,45 & -0,45 \end{pmatrix},$$

при цьому [64]

$$\text{rank} [\varphi'(u_0)] = 2, \quad u_1 \approx \begin{pmatrix} -0,455\,961 & -0,457\,894 & -0,455\,547 \end{pmatrix}^*.$$

Далі $\text{rank} [\varphi'(u_1)] = 2$, крім того, викопано умову (1.13):

$$\theta_1 \cdot \|u_1 - u_0\|_\infty \approx 0,00743\,856 \ll 1, \quad \theta_1 := \frac{\sigma_1(1)\sigma_2(1)}{2} \approx 0,942\,293.$$

Таким чином

$$u_2 \approx \begin{pmatrix} -0,455\,968\,239\,769\,595 \\ -0,457\,889\,951\,795\,185 \\ -0,455\,537\,594\,550\,856 \end{pmatrix}.$$

Далі $\text{rank} [\varphi'(u_2)] = 2$, крім того

$$\theta_2 \cdot \|u_2 - u_0\|_\infty \approx 0,00743\,453 \ll 1, \quad \theta_2 := \frac{\sigma_1(2)\sigma_2(2)}{2} \approx 0,00743\,453.$$

Для другого кроку схеми (1.12)

$$\|\varphi(u_2)\|_\infty \approx 3,69\,679 \times 10^{-11}, \quad u_3 \approx \begin{pmatrix} 0,455\,968\,239\,730\,150 \\ 0,457\,889\,951\,789\,936 \\ 0,455\,537\,594\,568\,580 \end{pmatrix}.$$

Далі $\text{rank} [\varphi'(u_3)] = 2$, крім того

$$\theta_3 \cdot \|u_3 - u_0\|_\infty \approx 0,00743\,453 \ll 1, \quad \theta_3 := \frac{\sigma_1(3) \sigma_2(3)}{2} \approx 0,942\,278.$$

Для третього кроку схеми (1.12) $\|\varphi(u_3)\|_\infty \approx 0$.

У частинному випадку $m = n$ має місце рівність $J^+(z) = J^{-1}(z)$.

Висновки до першого розділу

- 1) Проаналізовано сучасний стан і встановлено перспективність дослідження лінійних та нелінійних крайових задач для системи інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма з виродженим ядром, в тому числі, для матричних крайових задач.
- 2) Продемонстровано доцільність дослідження нелінійних крайових задач для системи інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма з виродженим ядром за допомогою модифікованого методу Ньютона.
- 3) Продемонстровано актуальність дослідження та вдосконалення класифікації лінійних та нелінійних крайових задач для системи інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма з виродженим ядром, які містять диференціально-алгебраїчний оператор.

Розділ 2

Умови розв'язності інтегро-диференціальної крайової задачі

2.1. Умови розв'язності нелінійної інтегро-диференціальної крайової задачі

Досліджуємо задачу про побудову розв'язку [36]

$$y(t) \in \mathbb{D}^2[a; b], \quad y'(t) \in \mathbb{L}^2[a; b]$$

нелінійної інтегро-диференціальної системи

$$y'(t) = A(t)y(t) + \Phi(t) \int_a^b F(y(s), y'(s), s) ds + f(t), \quad (2.1)$$

підпорядкованого крайовій умові

$$\ell y(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^p. \quad (2.2)$$

Розв'язок крайової задачі (2.1), (2.2) шукаємо в околі розв'язку

$$y_0(t) \in \mathbb{D}^2[a; b], \quad y'_0(t) \in \mathbb{L}^2[a; b]$$

породжуючої нетерової $n \neq p$ крайової задачі

$$y'_0(t) = A(t)y_0(t) + f(t), \quad \ell y_0(\cdot) = \alpha. \quad (2.3)$$

Тут

$$A(t) \in \mathbb{L}_{n \times n}^2[a; b] := \mathbb{L}^2[a; b] \otimes \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \Phi(t) \in \mathbb{L}_{n \times m}^2[a; b], \quad f(t) \in \mathbb{L}^2[a; b];$$

$\ell y(\cdot) : \mathbb{D}^2[a; b] \rightarrow \mathbb{R}^p$ — лінійний обмежений векторний функціонал, визначений на просторі $\mathbb{D}^2[a; b]$ n -вимірних абсолютно неперервних на відрізку $[a, b]$ функцій. Нелінійна вектор-функція $F(y(t), y'(t), t)$ двічі неперервно диференційовна в околі розв'язку $y_0(t)$ породжуючої крайової задачі (2.3) та його похідної $y'_0(t)$, а також неперервна за третім аргументом на відрізку $[a; b]$. Поставлена задача продовжує дослідження лінійної інтегро-диференціальної крайової задачі на випадок нелінійної підінтегральної вектор-функції $F(y, y', t)$.

Позначимо $X(t)$ нормальну ($X(a) = I_n$) фундаментальну матрицю однорідної частини породжуючої системи (2.3). Як відомо [36], у критичному випадку

$$P_{Q^*} \neq 0, \quad Q := \ell X(\cdot) \in \mathbb{R}^{p \times n}$$

породжуюча крайова задача (2.3) розв'язна тоді й тільки тоді, коли виконується умова

$$P_{Q_d^*} \left\{ \alpha - \ell K[f(s)](\cdot) \right\} = 0; \quad (2.4)$$

при цьому r -параметрична сім'я розв'язків породжуючої задачі (2.3)

$$y_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \alpha](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

зображується за допомогою узагальненого оператора Гріна

$$G[f(s); \alpha](t) := X(t)Q^+ \left\{ \alpha - \ell K[f(s)](\cdot) \right\} + K[f(s)](t).$$

Тут

$$K \left[f(s) \right] (t) := X(t) \int_a^t X^{-1}(s) f(s) ds$$

— оператор Гріна задачі Коші $y_0(a) = c$ для породжуючої системи (2.3), $X_r(t)$ — $(n \times r)$ — вимірна матриця, утворена з r -лінійно-незалежних стовпців нормальної фундаментальної матриці $X(t)$; матриця $P_{Q_d^*} \in \mathbb{R}^{d \times p}$, утворена з d лінійно-незалежних рядків матриці-ортопроектора

$$P_{Q^*} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{N}(Q^*).$$

У критичному випадку розв'язок крайової задачі (2.1), (2.2) шукаємо у вигляді $y(t) = y_0(t, c_r) + x(t)$. Для знаходження відхилення

$$x(t) \in \mathbb{D}^2[a; b], \quad x'(t) \in \mathbb{L}^2[a; b]$$

від породжуючого розв'язку $y_0(t, c_r)$ отримуємо крайову задачу

$$x'(t) = A(t)x(t) + \Phi(t) \int_a^b F(y(s), y'(s), s) ds, \quad (2.5)$$

$$\ell x(\cdot) = 0. \quad (2.6)$$

Відхилення $x(t) = X(t)v + \Psi(t)u$ від породжуючого розв'язку $y_0(t, c_r)$ визначають невідомі сталі та матриця

$$u := \int_a^b F(y(s), y'(s), s) ds \in \mathbb{R}^m, \quad v \in \mathbb{R}^m, \quad \Psi(t) := K[\Phi(s)](t) \in \mathbb{D}_{n \times m}^2[a; b].$$

Шуканий розв'язок $y(t) = y_0(t, c_r) + x(t)$, $x(t) = X(t)v + \Psi(t)u$ інтегродиференціальної системи (2.1) задовольняє крайову умову (2.2) за умови

$$Qv + Ru = 0, \quad R := \ell \Psi(\cdot) \in \mathbb{R}^{p \times m}. \quad (2.7)$$

Позначимо $P_\rho \in \mathbb{R}^{(m+n) \times \rho}$ матрицю, утворену з ρ лінійно-незалежних стовпців ортопроектора P_0 матриці $[Q; R] \in \mathbb{R}^{p \times (m+n)}$. Умову (2.7) задовольняють вектори

$$v = P_1 c_\rho, \quad u = P_2 c_\rho, \quad c_\rho \in \mathbb{R}^\rho; \quad P_0 := \text{col} (P_1, P_2), \quad P_1 \in \mathbb{R}^{n \times \rho}, \quad P_2 \in \mathbb{R}^{m \times \rho}.$$

Для знаходження вектора c_ρ , необхідного для визначення невідомих $u(c_\rho)$ та $v(c_\rho)$ отримуємо нелінійне рівняння (1.8); тут

$$\begin{aligned} \varphi(c_\rho) &:= \varphi(u(c_\rho), v(c_\rho)) := u(c_\rho) - \\ &- \int_a^b F(X(s)v + \Psi(s)u, A(s)X(s)v + \Phi(s)u, s) ds. \end{aligned}$$

Якщо для отриманого рівняння (1.8) справджуються умови леми 1.2.1, знаходимо невідомі $u(c_\rho)$ та $v(c_\rho)$. Таким чином, доведена наступна теорема [64].

Теорема 2.1.1. У критичному випадку ($P_{Q^*} \neq 0$) породжуюча крайова задача (2.3) розв'язна тоді й тільки тоді, коли виконується умова (2.4); при цьому r -параметрична сім'я розв'язків породжуючої задачі (2.3) має вигляд

$$y_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \alpha](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Шуканий розв'язок

$$y(t) = y_0(t, c_r) + x(t), \quad x(t) = X(t)v + \Psi(t)u, \quad v = P_1 c_\rho, \quad u = P_2 c_\rho, \quad c_\rho \in \mathbb{R}^\rho$$

нелінійної інтегро-диференціальної крайової задачі (2.1), (2.2) визначає вектор c_ρ , який задовольняє нелінійне рівняння (1.8): $\varphi(c_\rho) = 0$, умови розв'язності якого визначає попередня лема. Для знаходження вектора c_ρ застосовна ітераційна схема (1.12), при цьому швидкість збіжності послідовності наближень до розв'язку рівняння (1.8) квадратична.

У частинному випадку рівняння (1.8) — лінійне: $\varphi(c_\rho) := \mathcal{B}c_\rho + d$, умова розв'язності якого рівнозначна вимозі

$$P_{\mathcal{B}^*} = 0, \quad \mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m \times \rho}. \quad (2.8)$$

Тут $P_{\mathcal{B}^*} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{N}(\mathcal{B}^*)$ — ортопроектор матриці $\mathcal{B}^*$. За умови (2.8) розв'язок лінійного рівняння (1.8) має вигляд $c_\rho = P_J c_\mu - J^+ d$, $c_\mu \in \mathbb{R}^\rho$; тут $P_J : \mathbb{R}^\rho \rightarrow \mathbb{N}(J)$ — ортопроектор матриці $\mathcal{B}$.

Приклад 2.1.1. Вимогам доведеної теореми задовольняє задача про побудову 2π – періодичних розв'язків інтегро-диференціальної системи

$$y' = A(t)y + \Phi(t) \int_0^{2\pi} F(y(s), y'(s), s) ds + f(t); \quad (2.9)$$

тут

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad \Phi(t) := \begin{pmatrix} \cos^3 t & 0 \\ \cos^3 t & 0 \end{pmatrix},$$

крім того

$$F(y(t), y'(t), t) := y(t)(1 - y^*(t)y'(t)) \cos t.$$

Для породжуючої періодичної крайової задачі у разі системи (2.1.1)

$$P_Q = P_{Q^*} = I_2 \neq 0,$$

тому має місце критичний випадок, причому виконується умова розв'язності (2.4), при цьому двопараметрична сім'я розв'язків породжуючої задачі [64]

$$y_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s)](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^2$$

зображується за допомогою узагальненого оператора Гріпа [64]

$$G[f(s)](t) = \begin{pmatrix} \sin t + \sin 3t \\ \cos t - \cos 3t \end{pmatrix}$$

та нормальної фундаментальної матриці однорідної частини породжуючої системи (2.1.1)

$$X(t) = X_r(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$Q = 0, \quad R = -\frac{3\pi}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Періодичний розв'язок

$$y(t) = y_0(t, c_r) + x(t), \quad x(t) = X(t)v + \Psi(t)u, \quad v = P_1 c_\rho, \quad u = P_2 c_\rho, \quad c_\rho \in \mathbb{R}^3$$

нелінійної інтегро-диференціальної системи (2.1.1) визначає вектор c_ρ , який задовольняє лінійне рівняння (1.8):

$$\varphi(c_\rho) := \mathcal{B} c_\rho + d; \quad \mathcal{B} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -8\pi & 0 & \pi \\ -\pi & 8 & -8\pi \end{pmatrix},$$

крім того

$$d(c_r) = \frac{\pi}{32} \begin{pmatrix} 1 - 32c_1 + 4c_2 \\ -4(2 + c_1 + 8c_2) \end{pmatrix}, \quad c_r := \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Останнє рівняння розв'язне у наслідок повноти рангу матриці $\mathcal{B}$. Покладемо $c_\mu := 0$. Шуканий 2π -періодичний розв'язок нелінійної інтегро-диференціальної системи (2.1.1) має вигляд

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix};$$

тут

$$\begin{aligned}
 y_1(t) &= \frac{3\,862\,708 \cos t}{1\,383\,908\,045} + \frac{124\,805 c_1 \cos t}{89\,428\,786} + \frac{12\,394\,757 c_2 \cos t}{1\,110\,179\,952} + \\
 &+ \frac{12\,053\,843 \sin t}{539\,822\,396} + \frac{12\,394\,757 c_1 \sin t}{1\,110\,179\,952} + \frac{11\,712\,929 c_2 \sin t}{131\,138\,704} + \frac{\sin 3t}{4}, \\
 y_2(t) &= \frac{12\,053\,843 \cos t}{539\,822\,396} + \frac{12\,394\,757 c_1 \cos t}{1\,110\,179\,952} + \frac{11\,712\,929 c_2 \cos t}{131\,138\,704} - \\
 &- \frac{\cos 3t}{4} - \frac{3\,862\,708 \sin t}{1\,383\,908\,045} - \frac{124\,805 c_1 \sin t}{89\,428\,786} - \frac{12\,394\,757 c_2 \sin t}{1\,110\,179\,952}.
 \end{aligned}$$

У некритичному випадку ($P_{Q^*} = 0$) крайова задача (2.1), (2.2) розв'язна для будь-яких неоднорідностей $f(t)$ та α [64].

Наслідок 2.1.1. У некритичному випадку ($P_{Q^*} = 0$) r -параметрична сім'я розв'язків породжуючої задачі (2.3) має вигляд

$$y_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \alpha](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Шуканий розв'язок

$$y(t) = y_0(t, c_r) + x(t), \quad x(t) = X(t)v + \Psi(t)u, \quad v = P_1 c_\rho, \quad u = P_2 c_\rho, \quad c_\rho \in \mathbb{R}^\rho$$

нелінійної інтегро-диференціальної крайової задачі (2.1), (2.2) визначає вектор c_ρ , який задовольняє рівняння (1.8): $\varphi(c_\rho) = 0$, умови розв'язності якого визначає попередня лема. Для знаходження вектора c_ρ застосовна ітераційна схема (1.12), при цьому швидкість збіжності послідовності наближень до розв'язку рівняння (1.8) квадратична.

Приклад 2.1.2. Вимогам доведеного наслідку задовольняє задача про побудову 2π -періодичних розв'язків скалярної інтегро-диференціальної системи

$$y' = y + \Phi(t) \int_0^{2\pi} F(y(s), y'(s), s) ds + f(t); \quad (2.10)$$

тут

$$f(t) := \sin t, \quad \Phi(t) := \cos t, \quad F(y(t), y'(t), t) := (1 - y^2(t)) (1 - y'^2(t)).$$

Для породжуючої крайової задачі у разі системи (2.10) має місце некритичний випадок, при цьому єдиний розв'язок породжуючої задачі зображується за допомогою узагальненого оператора Гріпа [64]

$$G[f(s)](t) = -\frac{\sin t + \cos t}{2}.$$

Періодичний розв'язок

$$y(t) = y_0(t) + x(t), \quad x(t) = X(t)v + \Psi(t)u, \quad u = -2v, \quad v \in \mathbb{R}^1$$

нелінійної інтегро-диференціальної системи (2.10) визначає константа v , яка задовольняє нелінійне рівняння (1.8):

$$\varphi(v) = -2v - \frac{17\pi}{16} + \frac{7v^2\pi}{2} - \pi v^4.$$

Для знаходження константи v застосовна ітераційна схема (1.12), дійсно: за умови

$$v_0 := -\frac{1}{2}, \quad J_0 = -2 - 3\pi \neq 0, \quad v_1 = -\frac{7\pi}{8 + 12\pi},$$

при цьому

$$J_1 = -\frac{256 + 1152\pi + 2512\pi^2 + 3216\pi^3 + 1421\pi^4}{16(2 + 3\pi)^3},$$

крім того

$$\sigma_1(1) \approx 0,0894281, \quad \varphi(v_1) \approx 0,0894281.$$

Аналогічно

$$\sigma_2(1) \approx 13,2612, \quad \theta_1 \approx 0,285343 < 1,$$

отже умову збіжності ітераційної схеми (1.12) до точного розв'язку рівняння (1.8) на першому кроці виконано. На другому кроці ітераційної схеми (1.12) отримуємо

$$v_2 = \frac{\pi}{w}(4352 + 26112\pi + 69728\pi^2 + 91680\pi^3 + 39525\pi^4),$$

при цьому

$$J_2 \approx -11,1795 \neq 0, \quad \sigma_1(2) \approx 0,0894495, \quad \varphi(v_2) \approx 2,70456 \times 10^{-7}.$$

Тут

$$w := 16(2 + 3\pi)(256 + 1152\pi + 2512\pi^2 + 3216\pi^3 + 1421\pi^4).$$

Аналогічно

$$\sigma_2(2) \approx 13,2685, \quad \theta_2 \approx 0,285\,449 < 1,$$

отже умову збіжності ітераційної схеми (1.12) до точного розв'язку рівняння (1.8) на першому кроці виконано. На третьому кроці ітераційної схеми (1.12) отримуємо

$$v_3 \approx -\frac{149\,078\,559}{309\,925\,526}, \quad \sigma_1(3) \approx 0,0894\,496, \quad \sigma_2(3) \approx 13,2685.$$

Оскільки $\theta_3 \approx 0,285\,449 < 1$, умову збіжності ітераційної схеми (1.12) до точного розв'язку рівняння (1.8) на третьому кроці виконано; крім того

$$\varphi(v_3) \approx 3,99\,680 \times 10^{-15}.$$

Таким чином, отримано наближення до періодичного розв'язку

$$y(t) \approx -\frac{160\,106\,464 \cos t}{163\,205\,053} - \frac{20\,751\,201 \sin t}{1\,092\,981\,631}$$

інтегро-диференціальної системи (2.10). Для оцінки точності знайденого наближення до періодичного розв'язку інтегро-диференціальної системи (2.10) визначимо нев'язку

$$\left\| y' - y - \Phi(t) \int_0^{2\pi} F(y(s), y'(s), s) ds - f(t) \right\|_{\mathbb{C}[0;2\pi]} \approx 3,44\,169 \times 10^{-15}.$$

Крім того, відзначимо періодичність отриманого наближення.

Зазначимо, що у випадку нерозв'язності нелінійної інтегро-диференціальної крайової задачі (2.1), (2.2) її можна регуляризувати аналогічно [53, 148]. Зазначимо також, що запропонована схема дослідження нелінійної інтегро-диференціальної крайової задачі (2.1), (2.2) може бути перенесена на інтегро-диференціальної крайової задачі з запізненням [36, 63].

2.2. Розв'язки крайової задачі для матричного інтегро-диференціального рівняння з виродженим ядром

Досліджуємо задачу про побудову розв'язків [36]

$$Z(t) \in \mathbb{D}_{\alpha \times \beta}^2[a; b] := \mathbb{D}^2[a; b] \otimes \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}, \quad Z'(t) \in \mathbb{L}_{\alpha \times \beta}^2[a; b] := \mathbb{L}^2[a; b] \otimes \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$$

матричної інтегро-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром

$$Z'(t) = \Phi(t) \int_a^b \left[A(s)Z(s) + B(s)Z'(s) \right] \Psi(t) ds + F(t), \quad (2.11)$$

підпорядкованих крайовій умові

$$\mathcal{L}Z(\cdot) = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu \times \nu}. \quad (2.12)$$

Тут

$$\Phi(t) \in \mathbb{L}_{\alpha \times \gamma}^2[a; b], \quad A(t), B(t) \in \mathbb{L}_{\gamma \times \alpha}^2[a; b],$$

$$\Psi(t) \in \mathbb{L}_{\beta \times \beta}^2[a; b], \quad F(t) \in \mathbb{L}_{\alpha \times \beta}^2[a; b];$$

$\mathcal{L}Z(\cdot)$ — лінійний обмежений матричний функціонал:

$$\mathcal{L}Z(\cdot) : \mathbb{D}_{\alpha \times \beta}^2[a; b] \rightarrow \mathbb{R}^{\mu \times \nu}.$$

Взагалі кажучи, припускаємо, що $\alpha, \beta, \gamma, \mu, \nu \in \mathbb{N}$ — довільні натуральні числа. Матрична крайова задача (2.11), (2.12) узагальнює традиційні постановки задач для інтегро-диференціальної системи типу Фредгольма [36]. Розв'язок матричної інтегро-диференціальної системи (2.11) представимо у вигляді

$$Z(t) = \int_a^t \Phi(s) C_0 \Psi(s) ds + C_1 + \mathcal{F}(t), \quad \mathcal{F}(t) := \int_a^t F(s) ds,$$

де

$$C_0 := \int_a^b \left[A(s)Z(s) + B(s)Z'(s) \right] ds \in \mathbb{R}^{\gamma \times \beta}, \quad C_1 \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$$

— невідомі сталі матриці, для знаходження яких приходимо до матричного рівняння типу Сильвестра

$$C_0 - \int_a^b A(t) \int_a^t \Phi(s) C_0 \Psi(s) ds dt - \int_a^b A(t) C_1 dt - \quad (2.13)$$

$$-\int_a^b A(s)\Phi(s)C_0\Psi(s)ds = \mathcal{B} := \int_a^b \left[A(s)\mathcal{F}(s) + B(s)F(s) \right] ds \in \mathbb{R}^{\gamma \times \beta}$$

Визначимо оператор $\mathcal{A} = \mathcal{M}\mathcal{B} : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{m \cdot n}$, як оператор, який ставить у відповідність матриці $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ вектор-стовпець $\mathcal{M}\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$, утворений з n стовпців матриці $\mathcal{B}$, а також обернений оператор

$$\mathcal{M}^{-1}\mathcal{A} : \mathbb{R}^{m \cdot n} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n},$$

який ставить у відповідність вектору $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$ матрицю $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Позначимо $\Theta^{(j)} \in \mathbb{R}^{\gamma \times \beta}$, $j = 1, 2, \dots$, $\beta \cdot \gamma$ — природний базис простору $\mathbb{R}^{\beta \times \gamma}$, а також $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$, $j = 1, 2, \dots$, $\alpha \cdot \beta$ — природний базис простору $\mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$, при цьому задача про знаходження розв'язку рівняння (2.11) приводить до задачі про знаходження векторів $\xi \in \mathbb{R}^{\beta \gamma}$ и $\zeta \in \mathbb{R}^{\alpha \beta}$, компоненти яких визначають розвинення матриць

$$C_0 = \sum_{j=1}^{\beta \cdot \gamma} \Theta^{(j)} \xi_j, \quad C_1 = \sum_{j=1}^{\alpha \cdot \beta} \Xi^{(j)} \zeta_j, \quad \xi_j, \zeta_j \in \mathbb{R}^1, \quad c := \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\alpha \beta + \beta \gamma}.$$

У нових позначеннях, рівняння (2.13) набуває вигляду

$$\mathcal{D}c = \mathcal{M}\mathcal{B}, \quad \mathcal{D} := [\mathcal{D}_0; \mathcal{D}_1], \quad (2.14)$$

де

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0 &:= \left[\mathcal{D}_0^{(j)} \right]_{j=1}^{\beta \cdot \gamma} \in \mathbb{R}^{\beta \cdot \gamma \times \beta \cdot \gamma}, \quad \mathcal{D}_0^{(j)} := \mathcal{M}\Theta^{(j)} - \int_a^b A(s)\Phi(s)\Theta^{(j)}\Psi(s)ds - \\ &\quad - \mathcal{M} \int_a^b A(t) \int_a^t \Phi(s)\Theta^{(j)}\Psi(s)dsdt, \end{aligned}$$

а також

$$\mathcal{D}_1 := \left[\mathcal{D}_1^{(j)} \right]_{j=1}^{\alpha \cdot \beta} \in \mathbb{R}^{\beta \cdot \gamma \times \alpha \cdot \beta}, \quad \mathcal{D}_1^{(j)} := -\mathcal{M} \int_a^b A(t)\Xi^{(j)}dt$$

— сталі матриці. Позначимо $P_{\mathcal{D}^*} \in \mathbb{R}^{\beta \gamma \times \beta \gamma}$ і $P_{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^{(\alpha + \gamma)\beta \times (\alpha + \gamma)\beta}$ матриці-ортопроектори: $P_{\mathcal{D}^*} : \mathbb{R}^{\beta \gamma} \rightarrow \mathbb{N}(\mathcal{D}^*)$, $P_{\mathcal{D}} : \mathbb{R}^{\alpha \beta + \beta \gamma} \rightarrow \mathbb{N}(\mathcal{D}^*)$. За умови [36, 51]

$$P_{\mathcal{D}^*}\mathcal{M}\mathcal{B} = 0 \quad (2.15)$$

і тільки при ній загальний розв'язок рівняння (2.14)

$$c = \mathcal{D}^+ \mathcal{M} \mathcal{B} + P_{\mathcal{D}_\rho} c_\rho, \quad c_\rho \in \mathbb{R}^\rho$$

визначає загальний розв'язок

$$C_0 = C_0(\mathcal{B}) + C_0(c_\rho), \quad C_0(\mathcal{B}) := \mathcal{M}^{-1} \left[\xi(\mathcal{B}) \right], \quad C_0(c_\rho) := \mathcal{M}^{-1} \left[\xi(c_\rho) \right],$$

$$C_1 = C_1(\mathcal{B}) + C_1(c_\rho), \quad C_1(\mathcal{B}) := \mathcal{M}^{-1} \left[\zeta(\mathcal{B}) \right], \quad C_1(c_\rho) := \mathcal{M}^{-1} \left[\zeta(c_\rho) \right]$$

матричного рівняння типу Сильвестра (2.13); тут

$$\xi(\mathcal{B}) := \begin{pmatrix} I_{\beta\gamma} & O \end{pmatrix} \mathcal{D}^+ \mathcal{M} \mathcal{B}, \quad \xi(c_\rho) := \begin{pmatrix} I_{\beta\gamma} & O \end{pmatrix} P_{\mathcal{D}_\rho} c_\rho,$$

$$\zeta(\mathcal{B}) := \begin{pmatrix} O & I_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \mathcal{D}^+ \mathcal{M} \mathcal{B}, \quad \zeta(c_\rho) := \begin{pmatrix} O & I_{\alpha\beta} \end{pmatrix} P_{\mathcal{D}_\rho} c_\rho;$$

матриця $P_{\mathcal{D}_\rho} \in \mathbb{R}^{(\alpha+\gamma)\beta \times \rho}$ складена з ρ лінійно незалежних стовпців матриці-ортопроектора $P_{\mathcal{D}}$. Таким чином, доведено наступне твердження [67]

Лема 2.2.1. *За умови (2.15) загальний розв'язок*

$$Z(t, c_\rho) = W(t, c_\rho) + \mathcal{K} \left[F(s) \right] (t), \quad c_\rho \in \mathbb{R}^\rho$$

задачі Коші $Z(a) = C_1(c_\rho)$ для рівняння (2.11) визначає узагальнений оператор Гріна матричної задачі Коші

$$\mathcal{K} \left[F(s) \right] (t) := \int_a^t \Phi(s) C_0(\mathcal{B}) \Psi(s) ds + C_1(\mathcal{B}) + \mathcal{F}(t);$$

тут

$$W(t, c_\rho) := C_1(c_\rho) + \int_a^t A(s) \Phi(s) C_0(c_\rho) \Psi(s) ds, \quad c_\rho \in \mathbb{R}^\rho$$

— загальний розв'язок задачі Коші $Z(a) = 0$ для однорідної частини рівняння (2.11).

Позначимо $\Theta_\rho^{(j)} \in \mathbb{R}^\rho$, $j = 1, 2, \dots, \rho$ — природний базис простору $\mathbb{R}^\rho$. Підставляючи розв'язок рівняння (2.11) у крайову умову (2.12), приходимо до задачі про знаходження розв'язку

$$c_\rho = \sum_{j=1}^{\rho} \Theta_\rho^{(j)} \xi_j \in \mathbb{R}^\rho, \quad \xi_j \in \mathbb{R}^1, \quad j = 1, 2, \dots, \rho$$

матричного рівняння типу Сильвестра [32]

$$LW(\cdot, c_\rho) + LK \left[F(s) \right] (\cdot) = \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu \times \nu}. \quad (2.16)$$

У критичному випадку ($P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$) за умови (2.15) та [139]

$$P_{\mathcal{Q}_d^*} \mathcal{M} \left\{ \mathfrak{A} - LK \left[F(s) \right] (\cdot) \right\} = 0 \quad (2.17)$$

розв'язок рівняння (2.15) визначає вектор $c_\rho = c_\rho(c_r) + c_\rho(\mathcal{A}, F)$, де

$$c_\rho(\mathcal{A}, F) := \mathcal{Q}^+ \mathcal{M} \left\{ \mathfrak{A} - LK \left[F(s) \right] (\cdot) \right\}, \quad c_\rho(c_r) := P_{\mathcal{Q}_r} c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Тут $P_{\mathcal{Q}^*} - (\mu \cdot \nu \times \mu \cdot \nu)$ — матриця-ортопроектор $P_{\mathcal{Q}^*} : \mathbb{R}^{\mu \cdot \nu} \rightarrow N(\mathcal{Q}^*)$, де

$$\mathcal{Q} := \left[\mathcal{Q}_i \right]_{i=1}^\rho \in \mathbb{R}^{\mu \cdot \nu \times \rho}, \quad \mathcal{Q}_j := \mathcal{M} \left\{ L\mathcal{M}^{-1} \left[W(\cdot, \Theta_\rho^{(j)}) \right] \right\}, \quad j = 1, 2, \dots, \rho;$$

матриця $P_{\mathcal{Q}_r}$, утворена з r лінійно-незалежних стовпців ($\rho \times \rho$) — матриці-ортопроектора $P_{\mathcal{Q}}$; матриця $P_{\mathcal{Q}_d^*}$ складена з d лінійно незалежних рядків матриці-ортопроектора $P_{\mathcal{Q}^*}$. Таким чином, у критичному випадку, за умови (2.15) і (2.17) розв'язок матричної інтегро-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром (2.11), який задовольняє крайову умову (2.12)

$$Z(t, c_r) = W(t, c_r) + G \left[F(s); \mathfrak{A} \right] (t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

визначає узагальнений оператор Гріна

$$G \left[F(s); \mathfrak{A} \right] (t) := W(t, c_\rho(\mathcal{A}, F)) + K \left[F(s) \right] (t)$$

та загальний розв'язок однорідної частини крайової задачі (2.11), (2.12)

$$W(t, c_r) := C_1(c_\rho(c_r)) + \int_a^t A(s) \Phi(s) C_0(c_\rho(c_r)) \Psi(s) ds;$$

$$W(t, c_\rho(\mathcal{A}, F)) := C_1(c_\rho(\mathcal{A}, F)) + \int_a^t A(s) \Phi(s) C_0(c_\rho(\mathcal{A}, F)) \Psi(s) ds.$$

Таким чином, доведено наступне твердження [67].

Теорема 2.2.1. У критичному випадку ($P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$) за умови (2.15) і (2.17) розв'язок матричної інтегро-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженням ядром (2.11), який задовольняє крайовій умові (2.12)

$$Z(t, c_r) = W(t, c_r) + G\left[F(s); \mathfrak{A}\right](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

визначає узагальнений оператор Гріна

$$G\left[F(s); \mathfrak{A}\right](t) := W(t, c_\rho(\mathcal{A}, F)) + \mathcal{K}\left[F(s)\right](t)$$

і загальний розв'язок однорідної частини крайової задачі (2.11), (2.12)

$$W(t, c_r) := C_1(c_\rho(c_r)) + \int_a^t A(s)\Phi(s)C_0(c_\rho)\Psi(s) ds;$$

тут

$$W(t, c_\rho(\mathcal{A}, F)) := C_1(c_\rho(\mathcal{A}, F)) + \int_a^t A(s)\Phi(s)C_0(c_\rho(\mathcal{A}, F))\Psi(s) ds,$$

— загальний розв'язок однорідної частини крайової задачі (2.11), (2.12) та

$$\mathcal{K}\left[F(s)\right](t) := \int_a^t \Phi(s)C_0(\mathcal{B})\Psi(s) ds + C_1(\mathcal{B}) + \mathcal{F}(t);$$

— узагальнений оператор Гріна матричної задачі Коші $Z(a) = 0$ для лінійної матричної інтегро-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженням ядром (2.11).

Знайдені умови розв'язності (2.15) і (2.17), а також конструкція узагальненого оператора Гріна крайової задачі для матричної інтегро-диференціальної системи типу Фредгольма (2.11), (2.12) узагальнюють традиційні результати для нетерових крайових задач [36].

Приклад 2.2.1. Вимогам доведеної теореми 2.2.1 задовольняє задача про побудову 2π -періодичних розв'язків матричної інтегро-диференціальної системи

$$Z'(t) = \Phi(t) \int_a^b \left[A(s)Z(s) + B(s)Z'(s) \right] \Psi(t) ds + F(t), \quad (2.18)$$

de

$$A(t) := \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi(t) := \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Psi(t) := \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad B(t) := \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ 0 & \cos t & \sin t \end{pmatrix},$$

$$F(t) := \begin{pmatrix} \sin t & 0 \\ \cos t & \sin t \\ 0 & \cos t \end{pmatrix}.$$

Позначимо [67]

$$\Xi_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Xi_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \Xi_6 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

природний базис простору $\mathbb{R}^{3 \times 2}$, а також

$$\Theta_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Theta_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \Theta_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

природний базис простору $\mathbb{R}^{2 \times 2}$; при цьому

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 1 & \pi & -\pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pi & 0 & 1 & \pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $P_{\mathcal{D}^*} = 0$, то умова (2.15) виконується. Матриці

$$C_0(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix}, \quad C_0(c_\rho) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_1(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_1(c_\rho) = \begin{pmatrix} c_1 & c_4 \\ c_2 & c_5 \\ c_3 & c_6 \end{pmatrix}$$

визначають загальний розв'язок [67]

$$W(t, c_\rho) = C_1(c_\rho), \quad c_\rho \in \mathbb{R}^6$$

задачі Коші $Z(0) = 0$ для однорідної частини рівняння (2.2.1), а також узагальнений оператор Гріна матричної задачі Коші

$$\mathcal{K}\left[F(s)\right](t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos t - \pi \sin^2 t & \pi \cos t \sin t \\ (1 + \pi \cos t) \sin t & 1 - \cos t + \pi \sin^2 t \\ 0 & \sin t \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\mathcal{Q} = 0$, $\mathcal{A} = 0$, $L\mathcal{K}[F(s)](\cdot) = 0$, то умову (2.17) виконано, при цьому розв'язок матричної інтегро-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром, що задовольняє крайовій умові (2.2.1)

$$Z(t, c_r) = W(t, c_r) + G\left[F(s); \mathfrak{A}\right](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^6$$

визначає узагальнений оператор Гріна і загальний розв'язок $W(t, c_r) = C_1(c_\rho)$ однорідної частини крайової задачі (2.2.1).

У некритичному випадку ($P_{\mathcal{Q}^*} = 0$) умова (2.17) виконується для будь-яких неоднорідностей крайової задачі (2.11), (2.12), при цьому розв'язок матричної інтегро-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром (2.11), який задовольняє крайовій умові (2.12) визначає наступне твердження [67].

Наслідок 2.2.1. *У некритичному випадку ($P_{\mathcal{Q}^*} = 0$) за умови (2.15) розв'язок матричної інтегро-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром (2.11), який задовольняє крайовій умові (2.12) має вигляд*

$$Z(t, c_r) = W(t, c_r) + G\left[F(s); \mathfrak{A}\right](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Приклад 2.2.2. *Вимогам доведеного наслідку задовольняє задача про побудову антиперіодичних розв'язків матричної інтегро-диференціальної системи (2.2.1).*

Загальний розв'язок $W(t, c_\rho)$, $c_\rho \in \mathbb{R}^6$ задачі Коші $Z(0) = 0$ для однорідної частини рівняння (2.2.1), а також узагальнений оператор Гріна матричної задачі Коші $\mathcal{K}[F(s)](t)$ були знайдені в прикладі 2.2.1. Оскільки

$$\mathcal{Q} = 2 I_6, \mathcal{A} = 0, \mathcal{K}[F(s)](\cdot) = 0,$$

то єдиний розв'язок антиперіодичної задачі (2.2.1) має вигляд [67]

$$Z(t) = G \left[F(s); \mathfrak{A} \right] (t) = \mathcal{K} \left[F(s) \right] (t).$$

Запропоновані умови розв'язку, а також конструкція узагальненого оператора Гріна крайової задачі (2.11), (2.12) для матричної інтегро-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром (2.11) узагальнюють умови розв'язності та конструкцію узагальненого оператора Гріна інтегро-диференціальної крайової задачі [31], а також матричної крайової задачі [33]. Крім того, аналогічні умови існування розв'язку, а також конструкція узагальненого оператора Гріна матричної інтегро-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром (2.11) можуть бути отримані для аналогічної крайової задачі в абстрактних просторах [36, 58]. Запропонована схема дослідження крайових задач матричної інтегро-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром (2.11) аналогічно [31] може бути перенесена на нелінійні інтегро-диференціальні системи типу Фредгольма з виродженим ядром, а також аналогічно [34, 40] — на матричні крайові задачі для інтегро-диференціальних систем типу Фредгольма з виродженим ядром, що містять диференціально-алгебраїчний оператор. З іншого боку, у разі нерозв'язності матричні крайові задачі для інтегро-диференціальних систем типу Фредгольма з виродженим ядром можуть бути регуляризовані аналогічно [53].

2.3. Узагальнений оператор Гріна матричної інтегрально-диференціальної крайової задачі, не розв'язаної відносно похідної

Досліджуємо задачу про побудову розв'язків [36]

$$Z(t) \in \mathbb{D}^2[a; b], \quad Z'(t) \in \mathbb{L}^2[a; b], \quad Z(t) \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$$

матричної інтегро-диференціальної системи

$$\mathcal{D}Z(t) = \mathcal{I}Z(t) + F(t), \quad (2.19)$$

підпорядкованих крайовій умові

$$\mathcal{L}Z(\cdot) = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\lambda \times \mu}. \quad (2.20)$$

Тут [72]

$$\mathcal{D}Z(t) := \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q R_i(t) Z'(t) S_j(t) : \mathbb{D}^2[a; b] \rightarrow \mathbb{L}^2[a; b]$$

— диференціальний оператор,

$$\mathcal{I}Z(t) := \Phi(t) \int_a^b \left[A(s)Z(s) + B(s)Z'(s) \right] \Psi(t) ds : \mathbb{D}^2[a; b] \rightarrow \mathbb{D}^2[a; b]$$

— інтегральний оператор,

$$\Phi(t) \in \mathbb{R}^{\gamma \times \eta}, \quad A(t), B(t) \in \mathbb{R}^{\eta \times \alpha}, \quad \Psi(t) \in \mathbb{R}^{\beta \times \delta}, \quad R_i(t) \in \mathbb{R}^{\gamma \times \alpha}, \quad S_i(t) \in \mathbb{R}^{\beta \times \delta}$$

та $F(t) \in \mathbb{R}^{\gamma \times \delta}$ — матриці, елементи яких належать простору $\mathbb{D}^2[a; b]$ абсолютно неперервних на відрізку $[a; b]$ функцій [36], $\mathcal{L}Z(\cdot)$ — лінійний обмежений матричний функціонал:

$$\mathcal{L}Z(\cdot) : \mathbb{D}^2[a; b] \rightarrow \mathbb{R}^{\lambda \times \mu}.$$

Взагалі кажучи, припускаємо $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \delta \neq \eta \neq \lambda \neq \mu$. Матрична нетерова крайова задача (2.19), (2.20) узагальнює традиційні постановки задач для інтегро-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженням

ядром [36]. Розв'язок матричної інтегро-диференціальної системи (2.19) шукатимемо у вигляді

$$Z(t) = \sum_{j=1}^{\alpha \cdot \beta} \Xi^{(j)} y_j(t), \quad y_j(t) \in \mathbb{R}^1, \quad y(t) \in \mathbb{R}^{\alpha \cdot \beta},$$

при цьому оператор

$$\mathcal{M} \mathcal{D} Z(t) = \mathfrak{D}(t) y'(t) : \mathbb{R}^{\alpha \times \beta} \rightarrow \mathbb{R}^{\gamma \delta}$$

визначає матриця

$$\mathfrak{D}(t) := \left\{ \mathfrak{D}_i(t) \right\}_{k=1}^{\alpha \beta} \in \mathbb{R}^{\delta \gamma \times \alpha \beta}, \quad \mathfrak{D}_k(t) := \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q R_i(t) \Xi^{(k)} S_j(t).$$

Оператор

$$\mathcal{M} \mathcal{I} Z(t) = \mathcal{M} \Phi(t) C_0 \Psi(t) : \mathbb{R}^{\alpha \times \beta} \rightarrow \mathbb{R}^{\gamma \delta}$$

визначає невідома стала матриця

$$C_0 := \int_a^b \left[A(s) Z(s) + B(s) Z'(s) \right] ds \in \mathbb{R}^{\eta \times \beta},$$

розклад якої шукатимемо у вигляді

$$C_0 = \sum_{j=1}^{\eta \cdot \beta} \Theta^{(j)} \xi_j, \quad \xi_j \in \mathbb{R}^1, \quad \xi \in \mathbb{R}^{\eta \cdot \beta},$$

при цьому

$$\mathcal{M} \mathcal{I} Z(t) = \Omega(t) \xi, \quad \Omega(t) := \left\{ \Omega_i(t) \right\}_{i=1}^{\beta \eta} \in \mathbb{R}^{\delta \gamma \times \beta \eta},$$

$$\Omega_i(t) := \mathcal{M} \Phi(t) \Theta^{(i)} \Psi(t) \in \mathbb{R}^{\delta \gamma}.$$

Задача про побудову розв'язків матричного рівняння (2.19) рівнозначна до задачі про знаходження розв'язків традиційного диференціально-алгебраїчного рівняння

$$\mathfrak{D}(t) y'(t) = \Omega(t) \xi + \mathcal{F}(t), \quad \mathcal{F}(t) := \mathcal{M} F(t).$$

За умови повноти рангу матриці $\mathfrak{D}(t) : P_{\mathfrak{D}^*(t)} = 0$ остання задача приводить до звичайного диференціального рівняння

$$y'(t) = \mathcal{A}(t)\xi + \mathfrak{F}(t) + \psi(t), \quad (2.21)$$

розв'язок якого

$$y(t) = \int_a^t \mathcal{A}(s)\xi \, ds + \int_a^t [\mathfrak{F}(s) + \psi(s)] \, ds + \zeta, \quad \zeta \in \mathbb{R}^{\alpha\beta}$$

визначає розв'язок матричного рівняння (2.19)

$$Z(t, \zeta, \xi) = \mathcal{M}^{-1} \int_a^t \mathcal{A}(s)\xi \, ds + \mathcal{M}^{-1} \int_a^t [\mathfrak{F}(s) + \psi(s)] \, ds + C_1, \quad C_1 := \mathcal{M}^{-1}[\zeta];$$

тут

$$P_{\mathfrak{D}^*(t)} : \mathbb{R}^{\gamma\delta} \rightarrow \mathbb{N}(\mathfrak{D}^*(t)), \quad P_{\mathfrak{D}(t)} : \mathbb{R}^{\alpha\beta} \rightarrow \mathbb{N}(\mathfrak{D}(t))$$

— матриці-ортопроектори, $\varphi(t)$ — довільна вектор-функція:

$$\varphi(t) \in \mathbb{D}^2[a; b],$$

крім того

$$\mathcal{A}(t) := \mathfrak{D}^+(t)\Omega(t), \quad \mathfrak{F}(t) := \mathfrak{D}^+(t)\mathcal{F}(t), \quad \psi(t) := P_{\mathfrak{D}(t)}\varphi(t) \in \mathbb{D}^2[a; b].$$

За умови повноти рангу матриці $\mathfrak{D}(t)$ має місце включення [61]

$$\mathfrak{D}^+(t) \in \mathbb{D}^2[a; b].$$

Зауважимо, що звичайне диференціальне рівняння (2.21) рівнозначне матричному рівнянню

$$Z'(t) = \mathcal{M}^{-1}\mathcal{A}(t)\xi + \mathcal{M}^{-1}[\mathfrak{F}(t) + \psi(t)].$$

Для знаходження векторів $\xi \in \mathbb{R}^{\eta\beta}$ та $\zeta \in \mathbb{R}^{\alpha\beta}$, компоненти яких визначають розвинення сталих матриць

$$C_0 = \sum_{j=1}^{\beta\cdot\gamma} \Theta^{(j)} \xi_j, \quad C_1 = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \Xi^{(j)} \zeta_j,$$

використовуємо матричне рівняння типу Сильвестра

$$C_0 = \int_a^b \left[A(s)Z(s, \zeta, \xi) + B(s)Z'(s, \zeta, \xi) \right] ds,$$

рівнозначне рівнянню

$$\begin{aligned} \Pi c = \mathfrak{b} := & \mathcal{M} \int_a^b \left\{ A(t) \mathcal{M}^{-1} \int_a^t [\mathfrak{F}(s) + \psi(s)] ds + \right. \\ & \left. + B(t) \mathcal{M}^{-1} [\mathfrak{F}(t) + \psi(t)] \right\} dt; \end{aligned} \quad (2.22)$$

тут

$$\begin{aligned} \Pi_0 := & \left\{ \mathcal{M} \Theta^{(i)} - \mathcal{M} \int_a^b \left\{ A(t) \mathcal{M}^{-1} \int_a^t \mathcal{A}(s) \mathcal{M} \Theta^{(i)} ds + \right. \right. \\ & \left. \left. + B(t) \mathcal{M}^{-1} \mathcal{A}(t) \mathcal{M} \Theta^{(i)} \right\} dt \right\}_{i=1}^{\beta\eta} \end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned} \Pi_1 := & \left\{ - \mathcal{M} \int_a^b A(t) \Xi^{(i)} dt \right\}_{i=1}^{\alpha\beta} \in \mathbb{R}^{\beta\eta \times \alpha\beta}, \\ \Pi := & [\Pi_0; \Pi_1] \in \mathbb{R}^{\beta\eta \times (\alpha+\eta)\beta}, \quad c := \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Позначимо $P_{\Pi^*} \in \mathbb{R}^{\beta\eta \times \beta\eta}$ та $P_{\Pi} \in \mathbb{R}^{(\alpha+\eta)\beta \times (\alpha+\eta)\beta}$ матриці-ортопроектори:

$$P_{\Pi^*} : \mathbb{R}^{\beta\eta} \rightarrow \mathbb{N}(\Pi^*), \quad P_{\Pi} : \mathbb{R}^{(\alpha+\eta)\beta} \rightarrow \mathbb{N}(\Pi).$$

За умови [36]

$$P_{\Pi^*} \mathfrak{b} = 0, \quad (2.23)$$

і тільки за неї, загальний розв'язок рівняння (2.3.)

$$c = \Pi^+ \mathfrak{b} + P_{\Pi_\rho} c_\rho, \quad c_\rho \in \mathbb{R}^\rho$$

визначає загальний розв'язок

$$\begin{aligned} C_0 = & C_0(\mathfrak{b}) + C_0(c_\rho), \quad C_0(\mathfrak{b}) := \mathcal{M}^{-1} \left[\xi(\mathfrak{b}) \right], \quad C_0(c_\rho) := \mathcal{M}^{-1} \left[\xi(c_\rho) \right], \\ C_1 = & C_1(\mathfrak{b}) + C_1(c_\rho), \quad C_1(\mathfrak{b}) := \mathcal{M}^{-1} \left[\zeta(\mathfrak{b}) \right], \quad C_1(c_\rho) := \mathcal{M}^{-1} \left[\zeta(c_\rho) \right] \end{aligned}$$

матричного рівняння типу Сильвестра; тут

$$\begin{aligned}\xi(\mathfrak{b}) &:= \begin{pmatrix} I_{\beta\eta} & O \end{pmatrix} \Pi^+ \mathfrak{b}, \quad \xi(c_\rho) := \begin{pmatrix} I_{\beta\eta} & O \end{pmatrix} P_{\Pi_\rho} c_\rho, \\ \zeta(\mathfrak{b}) &:= \begin{pmatrix} O & I_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \Pi^+ \mathfrak{b}, \quad \zeta(c_\rho) := \begin{pmatrix} O & I_{\alpha\beta} \end{pmatrix} P_{\Pi_\rho} c_\rho.\end{aligned}$$

Матриця $P_{\Pi_\rho} \in \mathbb{R}^{(\alpha+\eta)\beta \times \rho}$ утворена із ρ лінійно незалежних стовпців матриці-ортопроектора P_Π . За умови (2.23) та у разі повноти рангу матриці $\mathfrak{D}(t)$, загальний розв'язок

$$Z(t, c_\rho) = W(t, c_\rho) + \mathcal{K} \left[F(s); \varphi(s) \right] (t), \quad c_\rho \in \mathbb{R}^\rho$$

задачі Коші $Z(a) = C_1(\mathfrak{b}) + C_1(c_\rho)$ системи (2.19) визначає узагальнений оператор Гріна

$$\mathcal{K} \left[F(s); \varphi(s) \right] (t) := \mathcal{M}^{-1} \int_a^t \mathcal{A}(s) \xi(\mathfrak{b}) \, ds + \mathcal{M}^{-1} \int_a^t [\mathfrak{F}(s) + \psi(s)] \, ds + C_1(\mathfrak{b})$$

матричної задачі Коші $Z(a) = C_1(\mathfrak{b})$ та

$$W(t, c_\rho) := C_1(c_\rho) + \mathcal{M}^{-1} \int_a^t \mathcal{A}(s) \xi(c_\rho) \, ds$$

— загальний розв'язок задачі Коші $Z(a) = C_1(c_\rho)$ для однорідної частини рівняння (2.19). Позначимо

$$\Theta_\rho^{(j)} \in \mathbb{R}^\rho, \quad j = 1, 2, \dots, \rho$$

— природний базис простору $\mathbb{R}^\rho$. Підставляючи розв'язок рівняння (2.19) в крайову умову (2.20), приходимо до задачі про знаходження розв'язків

$$c_\rho = \sum_{j=1}^{\rho} \Theta_\rho^{(j)} \omega_j \in \mathbb{R}^\rho, \quad \omega_j \in \mathbb{R}^1, \quad j = 1, 2, \dots, \rho$$

матричного рівняння типу Сильвестра

$$LW(\cdot, c_\rho) + LK \left[F(s); \varphi(s) \right] (\cdot) = \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu \times \nu}. \quad (2.24)$$

У критичному випадку ($P_{Q^*} \neq 0$) за умови (2.23) та

$$P_{Q_d^*} \mathcal{M} \left\{ \mathfrak{A} - LK \left[F(s); \varphi(s) \right] (\cdot) \right\} = 0 \quad (2.25)$$

розв'язок матричного рівняння (2.23) визначає вектор

$$c_\rho = c_\rho(c_r) + c_\rho(\mathcal{A}, F),$$

де

$$c_\rho(c_r) := P_{\mathcal{Q}_r} c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r, \quad c_\rho(\mathcal{A}, F) := \mathcal{Q}^+ \mathcal{M} \left\{ \mathfrak{A} - LK \left[F(s); \varphi(s) \right] (\cdot) \right\}.$$

Тут $P_{\mathcal{Q}^*}$ — $(\mu \cdot \lambda \times \mu \cdot \lambda)$ — матриця-ортопроектор $P_{\mathcal{Q}^*} : \mathbb{R}^{\mu \cdot \lambda} \rightarrow \mathbb{N}(\mathcal{Q}^*)$, де

$$\mathcal{Q} := \left[\mathcal{Q}_i \right]_{i=1}^{\rho} \in \mathbb{R}^{\mu \cdot \lambda \times \rho}, \quad \mathcal{Q}_j := \mathcal{M} \left\{ L \mathcal{M}^{-1} \left[W(\cdot, \Theta_\rho^{(j)}) \right] \right\}, \quad j = 1, 2, \dots, \rho;$$

— матриця $P_{\mathcal{Q}_r}$ утворена з r лінійно-незалежних стовпців $(\rho \times \rho)$ — матриці-ортопроектора $P_{\mathcal{Q}}$; матриця $P_{\mathcal{Q}_d^*}$ утворена з d лінійно незалежних рядків матриці-ортопроектора $P_{\mathcal{Q}^*}$. За умови повноти рангу матриці $\mathfrak{D}(t)$, в критичному випадку, за умов (2.23) та (2.25) розв'язок матричної інтегро-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром (2.19), який задовольняє крайову умову (2.20)

$$Z(t, c_r) = W(t, c_r) + G \left[F(s); \varphi(s); \mathfrak{A} \right] (t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

визначає узагальнений оператор Гріна [72]

$$\begin{aligned} G \left[F(s); \varphi(s); \mathfrak{A} \right] (t) &:= \mathcal{M}^{-1} \int_a^t \mathcal{A}(s) \xi(c_\rho(\mathcal{A}, F)) \, ds + \\ &+ C_1(c_\rho(\mathcal{A}, F)) + \mathcal{K} \left[F(s); \varphi(s) \right] (t) \end{aligned}$$

і загальний розв'язок однорідної частини крайової задачі (2.19), (2.20)

$$W(t, c_r) := C_1(c_\rho(c_r)) + \mathcal{M}^{-1} \int_a^t \mathcal{A}(s) \xi(c_\rho(c_r)) \, ds.$$

Таким чином, доведено наступну достатню умову розв'язності крайової задачі для матричної інтегро-диференціальної системи, не розв'язаної відносно похідної [72].

Теорема 2.3.1. У критичному випадку ($P_{Q^*} \neq 0$) за умов (2.23) та (2.25), у випадку повноти рангу матриці $\mathfrak{D}(t)$, для довільної вектор-функції $\varphi(t) \in \mathbb{D}^2[a; b]$ розв'язок матричної інтегро-диференціальної системи (2.19), який задовольняє крайову умову (2.20) має вигляд

$$Z(t, c_r) = W(t, c_r) + G \left[F(s); \varphi(s); \mathfrak{A} \right] (t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Знайдені умови розв'язності (2.23) і (2.25), а також конструкція узагальненого оператора Гріна крайової задачі (2.19), (2.20) узагальнюють традиційні результати для нетерових крайових задач [36, 52, 54], у тому числі для інтегро-диференціальних систем типу Фредгольма з виродженим ядром [31, 69].

Приклад 2.3.1. Умовам теореми 2.3.1 задовольняє задача про побудову розв'язків матричної інтегро-диференціальної задачі

$$\mathcal{D}Z(t) = \mathcal{I}Z(t) + F(t), \quad \mathcal{L}Z(\cdot) = \mathfrak{A}, \quad (2.26)$$

де

$$\mathcal{D}Z(t) := \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 R_i(t) Z'(t) S_j(t),$$

$$\mathcal{I}Z(t) := \Phi(t) \int_0^1 \left[A(s) Z(s) + B(s) Z'(s) \right] \Psi(t) ds;$$

тут

$$R_1(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_1(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_2(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi(t) := \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi(t) := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & t \end{pmatrix},$$

$$A(t) := \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F(t) := \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}Z(\cdot) &:= \mathcal{R}_1 Z(0) \mathcal{S}_1 - \int_0^1 \left[\mathcal{R}_2 Z(s) \mathcal{S}_2 + \mathcal{R}_3 Z'(s) \mathcal{S}_3 \right] ds, \\ \mathcal{R}_1 &:= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{S}_1 &:= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{S}_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{S}_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{A} &:= \frac{1}{65\,821\,056} \begin{pmatrix} 5\,485\,088 & 0 & 5\,080\,012 \\ 60\,169\,873 & 0 & 1\,777\,815 \\ -2\,369\,880 & 0 & 0 \\ 5\,485\,088 & 0 & -27\,425\,440 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Позначимо

$$\Xi_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Xi_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \Xi_6 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

природний базис простору $\mathbb{R}^{3 \times 2}$, а також

$$\Theta_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Theta_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \Theta_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

природний базис простору $\mathbb{R}^{2 \times 2}$; при цьому $P_{\mathcal{D}^*(t)} = P_{\mathcal{D}(t)} = 0$,

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & t^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

крім того

$$\mathcal{A}(t) = \begin{pmatrix} \frac{t}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{t^2}{2} & -\frac{t}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & -\frac{t^2}{2} & \frac{t}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -t \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{F}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{t^2}{2} \\ 0 \\ t^2 \\ \frac{1}{2}t(1+t) \\ 0 \\ -t^2 \end{pmatrix}.$$

Матриця

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{15}{16} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{30} & \frac{1}{16} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{31}{30} & -\frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

визначає матриці-ортопроектори $P_{\Pi^*} = 0$ та

$$P_{\Pi} = \begin{pmatrix} \frac{37984}{171409} & 0 & \frac{900}{171409} & 0 & \frac{71160}{171409} & 0 & 0 & \frac{1860}{171409} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{900}{171409} & 0 & \frac{65025}{342818} & 0 & -\frac{480}{171409} & 0 & 0 & \frac{134385}{342818} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{71160}{171409} & 0 & -\frac{480}{171409} & 0 & \frac{133457}{171409} & 0 & 0 & -\frac{992}{171409} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1860}{171409} & 0 & \frac{134385}{342818} & 0 & -\frac{992}{171409} & 0 & 0 & \frac{277729}{342818} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $P_{\Pi^*} = 0$, то умову (2.23) виконано, при цьому загальний розв'язок рівняння (2.3.)

$$c = \Pi^+ \mathbf{b} + P_{\Pi^*} c_{\rho}, \quad c_{\rho} \in \mathbb{R}^{\rho}$$

визначає загальний розв'язок матричного рівняння типу Сильвестра

$$C_0 = C_0(\mathbf{b}) + C_0(c_{\rho}), \quad C_1 = C_1(\mathbf{b}) + C_1(c_{\rho}),$$

де

$$C_0(\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} -\frac{8775}{342818} & \frac{206569}{2742544} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_0(c_{\rho}) = \begin{pmatrix} \frac{4(9496c_1+225c_2)}{171409} & \frac{225(8c_1+289c_2)}{342818} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_1(\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} \frac{2340}{171409} & -\frac{98745}{2742544} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_1(c_\rho) = \begin{pmatrix} \frac{120(593c_1-4c_2)}{171409} & \frac{465(8c_1+289c_2)}{342818} \\ c_3 & c_5 \\ c_4 & c_6 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, загальний розв'язок

$$Z(t, c_\rho) = W(t, c_\rho) + \mathcal{K} \left[F(s) \right] (t), \quad c_\rho \in \mathbb{R}^6$$

задачі Коші $Z(0) = C_1(\mathbf{b}) + C_1(c_\rho)$ для матричної інтегро-диференціальної системи (2.3.1) визначає узагальнений оператор Гріна [72]

$$\mathcal{K} \left[F(s) \right] (t) = \begin{pmatrix} -\frac{585(-128+60t^2+1445t^3)}{5485088} & \frac{-197490+1371272t^2+845325t^3}{5485088} \\ 0 & 0 \\ \frac{t^3}{3} & -\frac{t^3}{3} \end{pmatrix}$$

матричної задачі Коші $Z(0) = C_1(\mathbf{b})$ та

$$W(t, c_\rho) = \begin{pmatrix} \frac{8c_1(35580+4748t^2+75t^3)+15c_2(-128+60t^2+1445t^3)}{685636} & -\frac{15(8c_1+289c_2)(-62+5t^3)}{685636} \\ c_3 & c_5 \\ c_4 & c_6 \end{pmatrix}$$

— загальний розв'язок задачі Коші $Z(0) = C_1(c_\rho)$ однорідної частини рівняння (2.3.1). Відзначимо, що у наслідок рівності $P_{\mathcal{D}(t)} = 0$ узагальнений оператор Гріна інтегро-диференціальної системи (2.3.1) не залежить від довільної функції $\varphi(t)$. Оскільки $P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$, отже задача про побудову розв'язків матричної інтегро-диференціальної задачі (2.25) представляє критичний випадок, при цьому умову її розв'язності (2.25) виконано. Розв'язок матричної інтегро-диференціальної задачі (2.3.1)

$$Z(t, c_r) = W(t, c_r) + G \left[F(s); \mathfrak{A} \right] (t), \quad c_r \in \mathbb{R}^1$$

визначає узагальнений оператор Гріна

$$G \left[F(s); \mathfrak{A} \right] (t) = \begin{pmatrix} -\frac{585(-128+60t^2+1445t^3)}{5485088} & \frac{-197490+1371272t^2+845325t^3}{5485088} \\ 0 & 1 \\ \frac{t^3}{3} & -\frac{t^3}{3} \end{pmatrix}$$

та загальний розв'язок [72]

$$W(t, c_r) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

однорідної частини крайової задачі (2.3.1).

Запропонована схема дослідження матричної інтегрально-диференціальної крайової задачі, не розв'язаної відносно похідної, суттєво відрізняється від техніки [40], основаної на використанні центральної канонічної форми і продовжує дослідження матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач без використання центральної канонічної форми [56, 57]. Отриману схему дослідження матричної інтегрально-диференціальної крайової задачі, не розв'язаної відносно похідної, може бути перенесено на задачі у частинних похідних [82, 83, 84] і на крайові задачі з імпульсним впливом [47].

2.4. Умови розв'язності задачі, оберненої до автономного інтегро-диференціального рівняння

Нетерова крайова задача для лінійного інтегро-диференціального рівняння типу Фредгольма з виродженим ядром вперше була розв'язана у статті [113]. Обернені задачі для інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма мало досліджені. Досліджуємо задачу, обернену до лінійного автономного інтегро-диференціального рівняння типу Фредгольма з виродженим ядром

$$y'(t) = A y(t) + \Phi \int_a^b \left[B y(s) + C y'(s) \right] ds \quad (2.27)$$

за відомим розв'язком цієї задачі [36, 113]

$$y(t) := \varphi(t) \in \mathbb{D}^2[a; b], \quad y'(t) := \varphi'(t) \in \mathbb{L}^2[a; b].$$

Тут $A, B, C, \Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — невідомі сталі матриці. У наслідок автономності рівняння (2.27) можна припустити, що $\Phi := I_n$. Дотримуючись схеми методу найменших квадратів [5, 49, 67], вимагатимемо мінімізації величини нев'язки

$$\Delta_0 := \left\| \varphi'(t) - A \varphi(t) - \Phi \int_a^b \left[B \varphi(s) + C \varphi'(s) \right] ds \right\|_{\mathbb{L}^2[a; b]}^2 \rightarrow \min.$$

Позначимо

$$\left\{ \Xi_j \right\}_{j=1}^{n^2} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

природний базис простору $\mathbb{R}^{n \times n}$. Матриці A, B та C шукатимемо у вигляді сум

$$A = \sum_{j=1}^p \Xi_j \alpha_j, \quad B = \sum_{j=1}^q \Xi_j \beta_j, \quad C = \sum_{j=1}^r \Xi_j \gamma_j, \quad \alpha_j, \beta_j, \gamma_j \in \mathbb{R}^1;$$

тут

$$p \leq n^2, \quad q \leq n^2, \quad r \leq n^2.$$

Позначимо матрицю Грама

$$\Gamma_0 := \int_a^b \Omega_0^*(t) \Omega_0(t) dt \in \mathbb{R}^{(p+q+r) \times (p+q+r)};$$

тут

$$\Omega_0^*(t) := \begin{pmatrix} \Xi_1 \varphi(t) & \dots & \Xi_p \varphi(t) , \\ \int_a^b \Xi_1 \varphi(t) dt & \dots & \int_a^b \Xi_q \varphi(t) dt & \int_a^b \Xi_1 \varphi'(t) dt & \dots & \int_a^b \Xi_r \varphi'(t) dt \end{pmatrix}.$$

Невідомий вектор $\gamma_0 \in \mathbb{R}^{(p+q+r)}$ визначає рівняння

$$\Gamma_0 \gamma_0 = \int_a^b \Omega_0^*(t) \varphi'(t) dt, \quad (2.28)$$

розв'язне за умови

$$\det \Gamma_0 \neq 0. \quad (2.29)$$

За умови (2.29) рівняння (2.28) має єдиний розв'язок

$$\gamma_0 = \Gamma_0^{-1} \int_a^b \Omega_0^*(t) \varphi'(t) dt,$$

який визначає матриці

$$A = \mathcal{M}^{-1}(\mathcal{P}_0 \gamma_0), \quad \mathcal{P}_0 := \begin{pmatrix} I_p & O & O \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times (p+q+r)},$$

$$B = \mathcal{M}^{-1}(\mathcal{P}_1 \gamma_0), \quad \mathcal{P}_1 := \begin{pmatrix} O & I_q & O \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{q \times (p+q+r)}$$

та

$$C = \mathcal{M}^{-1}(\mathcal{P}_2 \gamma_0), \quad \mathcal{P}_2 := \begin{pmatrix} O & O & I_r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{r \times (p+q+r)}.$$

Умова (2.29) являє собою необхідну умову мінімізації величини нев'язки Δ_0 ; достатню умову мінімізації величини нев'язки Δ_0 забезпечує додатна визначеність матриці Грама Γ_0 . В свою чергу, додатну визначеність матриці Грама Γ_0 забезпечує виконання критерію Сильвестра, а саме, додатність визначників всіх квадратних діагональних мінорів матриці Грама Γ_0 . Таким чином, доведено наступну лему [151].

Лема 2.4.1. *За умови (2.29), у разі додатної визначеності матриці Грама Γ_0 , задача про відновлення автономного лінійного інтегро-дифференціального рівняння типу Фредгольма з виродженим ядром (2.27) за відомим розв'язком цієї задачі*

$$y(t) := \varphi(t) \in \mathbb{D}^2[a; b], \quad y'(t) := \varphi'(t) \in \mathbb{L}^2[a; b]$$

має єдиний розв'язок, який мінімізує величину нев'язки Δ_0 у сенсі найменших квадратів.

Досліджуємо далі задачу, обернену до двоточної крайової задачі для лінійного автономного інтегро-диференціального рівняння типу Фредгольма з виродженим ядром

$$y'(t) = A y(t) + \Phi \int_a^b \left[B y(s) + C y'(s) \right] ds, \quad M z(a) + N z(b) = \alpha \quad (2.30)$$

за відомим розв'язком цієї задачі [36]

$$y(t) := \varphi(t) \in \mathbb{D}^2[a; b], \quad y'(t) := \varphi'(t) \in \mathbb{L}^2[a; b]$$

та відомим вектором $\alpha \in \mathbb{R}^m$; тут $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M, N \in \mathbb{R}^{m \times n}$ — невідомі сталі матриці. Дотримуючись схеми методу найменших квадратів [5, 49, 67], вимагатимемо мінімізації величини нев'язки

$$\Delta_1 := \left\| M \varphi(a) + N \varphi(b) - \alpha \right\|_{\mathbb{R}^m}^2 \rightarrow \min.$$

Позначимо

$$\left\{ \check{\Xi}_j \right\}_{j=1}^{mn} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

природний базис простору $\mathbb{R}^{m \times n}$. Матриці M та N шукатимемо у вигляді сум

$$M = \sum_{j=1}^{p'} \check{\Xi}_j \alpha_j, \quad N = \sum_{j=1}^{q'} \check{\Xi}_j \beta_j;$$

тут $p' \leq mn$, $q' \leq mn$. Позначимо матрицю Грама

$$\Gamma_1 := \Omega_1^* \Omega_1 \in \mathbb{R}^{(p'+q') \times (p'+q')};$$

тут

$$\Omega_1(t) := \left(\check{\Xi}_1 \varphi(a) \quad \dots \quad \check{\Xi}_{p'} \varphi(a) \quad \check{\Xi}_1 \varphi(b) \quad \dots \quad \check{\Xi}_{q'} \varphi(b) \right).$$

Невідомий вектор $\gamma_1 \in \mathbb{R}^{(p+q)}$ визначає рівняння

$$\Gamma_1 \gamma_1 = \alpha, \quad (2.31)$$

розв'язне за умови

$$\det \Gamma_1 \neq 0. \quad (2.32)$$

Умова (2.32) являє собою необхідну умову мінімізації величини нев'язки Δ_1 ; достатню умову мінімізації величини нев'язки Δ_1 забезпечує додатна визначеність матриці Грама Γ_1 . В свою чергу, додатну визначеність матриці Грама Γ_1 забезпечує виконання критерію Сильвестра, а саме, додатність визначників всіх квадратних діагональних мінорів матриці Грама Γ_1 . Таким чином, доведено наступну теорему [151].

Теорема 2.4.1. *За умови (2.29), у разі додатної визначеності матриці Грама Γ_0 , задача про відновлення автономного лінійного інтегро-диференціального рівняння типу Фредгольма з виродженим ядром (2.27) за відомим розв'язком цієї задачі має єдиний розв'язок*

$$A = \mathcal{M}^{-1}(\mathcal{P}_0 \gamma_0), \quad B = \mathcal{M}^{-1}(\mathcal{P}_1 \gamma_0), \quad C = \mathcal{M}^{-1}(\mathcal{P}_2 \gamma_0),$$

$$\gamma_0 = \Gamma_0^{-1} \int_a^b \Omega_0^*(t) \varphi'(t) dt,$$

який мінімізує величину нев'язки Δ_0 у сенсі найменших квадратів. За умови (2.32), у разі додатної визначеності матриці Грама Γ_1 , задача про відновлення крайової задачі для лінійного інтегро-диференціального рівняння типу Фредгольма з виродженим ядром (2.30) за відомим розв'язком цієї задачі

$$y(t) := \varphi(t) \in \mathbb{D}^2[a; b], \quad y'(t) := \varphi'(t) \in \mathbb{L}^2[a; b]$$

має єдиний розв'язок

$$M = \mathcal{M}^{-1}(\check{\mathcal{P}}_0 \gamma_1), \quad \check{\mathcal{P}}_0 := \begin{pmatrix} I_p & O \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p' \times (p' + q')},$$

$$N = \mathcal{M}^{-1}(\check{\mathcal{P}}_1 \gamma_0), \quad \check{\mathcal{P}}_1 := \begin{pmatrix} O & I_q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{q' \times (p' + q')},$$

який мінімізує величину нев'язки Δ_1 у сенсі найменших квадратів.

Приклад 2.4.1. Умови доведеної теореми справджуються у задачі про відновлення двоточної крайової задачі для лінійного автономного інтегро-диференціального рівняння типу Фредгольма з виродженим ядром

$$y'(t) = A y(t) + \Phi \int_0^1 \left[B y(s) + C y'(s) \right] ds, \quad M z(a) + N z(b) = \alpha \quad (2.33)$$

за відомим розв'язком

$$\varphi(t) := \begin{pmatrix} t & 1 \end{pmatrix}^*$$

та відомим вектором

$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}^*.$$

Природний базис простору $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ складають матриці

$$\Xi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Xi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Xi_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Xi_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Покладемо $p := q = 2$, $r := 0$. Таким чином, отримуємо невироджену додатно визначену матрицю

$$\Gamma_0 = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

тому задача про відновлення автономного інтегро-диференціального рівняння типу Фредгольма (2.33) за відомим розв'язком $z(t) := \varphi(t)$ однозначно розв'язна:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Покладемо $m := 2$, $p' := 0$, $q' = 2$. Таким чином, отримуємо невироджену додатно визначену матрицю $\Gamma_1 = I_2$, тому задача про відновлення двоточкової крайової умови однозначно розв'язна:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Запропонована схема дослідження задач, обернених до автономного інтегро-диференціального рівняння типу Фредгольма, аналогічно [24, 145] може бути перенесена на задачі, обернені до лінійної крайової задачі для різницево-алгебраїчного рівняння, а також на задачі, обернені до крайових задач у частинних похідних [82, 119].

Висновки до другого розділу

- 1) Знайдені умови розв'язності, а також конструкція розв'язків нелінійних недовизначених інтегро-диференціальних крайових задач, які узагальнюють результати, отримані для лінійної інтегрально-диференціальної крайової задачі на випадок нелінійної підінтегральної вектор-функції $F(y, y', t)$. Продемонстровано ефективність дослідження нелінійних не критичних недовизначених інтегро-диференціальних крайових задач за допомогою модифікованого методу Ньютона.
- 2) Знайдені необхідні і достатні умови розв'язності, а також конструкція узагальненого оператора Гріна лінійної крайової задачі для матричної інтегро-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром у критичному випадку. Знайдено умови розв'язності, а також конструкцію узагальненого оператора Гріна лінійної нетерової крайової задачі для матричної інтегро-диференціальної системи, не розв'язаної відносно похідної, яка узагальнює інтегро-диференціальні системи типу Фредгольма з виродженим ядром.
- 3) Запропоновані необхідні і достатні умови існування, а також конструкція розв'язку задачі, оберненої до задачі про знаходження розв'язку автономного інтегро-диференціального рівняння типу Фредгольма з виродженим ядром. Отримані необхідні і достатні умови існування, а також конструкція розв'язку задачі про відновлення двоточної крайової умови. Запропонована схема дослідження задачі, оберненої до задачі про знаходження розв'язку автономного інтегро-диференціального рівняння типу Фредгольма з виродженим ядром може бути перенесена на задачі, обернені до задачі про знаходження розв'язку інтегро-диференціального рівняння типу Фредгольма з виродженим ядром, які містять диференціально-алгебраїчний оператор.

Розділ 3

Нелінійні інтегро-диференціальні крайові задачі, не розв'язані відносно похідної

3.1. Невироджені інтегро-диференціальні крайові задачі, не розв'язані відносно похідної

Досліджено задачу про побудову розв'язків [36]

$$y(t) \in \mathbb{D}^2[a; b], \quad y'(t) \in \mathbb{L}^2[a; b]$$

лінійної інтегро-диференціальної системи, не розв'язаної відносно похідної

$$A(t)y'(t) = B(t)y(t) + \Phi(t) \int_a^b F(y(s), y'(s), s) ds + f(t), \quad (3.1)$$

підпорядкованих крайовій умові

$$\ell y(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^p. \quad (3.2)$$

Розв'язок крайової задачі (3.1), (3.2) шукаємо в околі розв'язку

$$y_0(t) \in \mathbb{D}^2[a; b], \quad y'_0(t) \in \mathbb{L}^2[a; b]$$

породжуючої нетерової $n \neq p$ крайової задачі (2.3). Вектор-функція $F(y(t), y'(t), t)$ лінійна за розв'язком $y(t)$ крайової задачі (3.1), (3.2) та його похідною $y'(t)$, а також неперервна за третім аргументом на відрізку $[a; b]$;

$$\ell y(\cdot) : \mathbb{D}^2[a; b] \rightarrow \mathbb{R}^p$$

— лінійний обмежений векторний функціонал, визначений на просторі $\mathbb{D}^2[a; b]$ n -вимірних абсолютно неперервних на відрізку $[a, b]$ функцій [36]. Поставлена задача продовжує дослідження лінійної інтегро-диференціальної крайової задачі на випадок лінійної крайової задачі (3.1) з прямокутною матрицею при похідній [40, 57]. За умови [57]

$$P_{A^*(t)} \equiv 0 \quad (3.3)$$

система (3.1) розв'язна відносно похідної

$$z' = A^+(t)B(t)z + \mathfrak{F}_0(t, \nu_0(t)); \quad (3.4)$$

тут $\text{rank } A(t) := \sigma_0 = m \leq n$. Крім того

$$\mathfrak{F}_0(t, \nu_0(t)) := A^+(t)f(t) + P_{A_{\rho_0}}(t)\nu_0(t),$$

$A^+(t)$ — псевдообернена (по Муру – Пенроузу) матриця, $P_{A^*(t)}$ — матриця-ортопроектор: $P_{A^*(t)} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{N}(A^*(t))$, $P_{A_{\rho_0}}(t)$ — $(n \times \rho_0)$ — матриця, утворена з ρ_0 лінійно-незалежних стовпців $(n \times n)$ — матриці-ортопроектора $P_A(t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{N}(A(t))$. У випадку (3.3) інтегро-диференціальну систему (3.1) будемо називати невинродженою [57]. За умови $\rho_0 \neq 0$ система (3.4), розв'язана відносно похідної, залежить від довільної неперервної вектор-функції $\nu_0(t)$. Позначимо $X_0(t)$ нормальну фундаментальну матрицю

$$X'_0(t) = A^+(t)B(t)X_0(t), \quad X_0(a) = I_n$$

отриманої системи звичайних диференціальних рівнянь (3.4). Як відомо [36], у критичному випадку $P_{Q^*} \neq 0$, $Q := \ell X(\cdot) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ для фіксованої неперервної функції $\nu_0(t) \in \mathbb{L}^2[a; b]$ породжуюча крайова задача розв'язна тоді й тільки тоді, коли виконується умова (2.4); при цьому r -параметрична сім'я розв'язків породжуючої задачі

$$y_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \alpha](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

зображується за допомогою узагальненого оператора Гріпа

$$G[f(s); \alpha](t) := X(t)Q^+ \left\{ \alpha - \ell K[f(s)](\cdot) \right\} + K[f(s)](t).$$

Тут

$$K \left[f(s) \right] (t) := X(t) \int_a^t X^{-1}(s) \mathfrak{F}_0(s, \nu_0(s)) ds$$

— оператор Гріна задачі Коші $y_0(a) = c$ для породжуючої системи, $X_r(t) := X(t)P_{Q_r}$; матриця $P_{Q_r} \in \mathbb{R}^{p \times r}$, утворена з r лінійно-незалежних стовпців матриці-ортопроектора $P_Q : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{N}(Q)$. Матриця $P_{Q_d^*} \in \mathbb{R}^{d \times p}$, утворена з d лінійно-незалежних рядків матриці-ортопроектора $P_{Q^*} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{N}(Q^*)$. У критичному випадку розв'язок крайової задачі (3.1), (3.2) шукаємо у вигляді $y(t) = y_0(t, c_r) + x(t)$. Для знаходження відхилення $x(t) \in \mathbb{D}^2[a; b]$, $x'(t) \in \mathbb{L}^2[a; b]$ від породжуючого розв'язку $y_0(t, c_r)$ отримуємо крайову задачу

$$A(t)x'(t) = B(t)x(t) + \Phi(t) \int_a^b F(y(s), y'(s), s) ds, \quad \ell x(\cdot) = 0.$$

Відхилення

$$x(t, u, v) = X_0(t)u + \Psi(t)v$$

від породжуючого розв'язку $y_0(t, c_r)$ визначають невідомі сталі

$$v := \int_a^b F(y(s), y'(s), s) ds \in \mathbb{R}^q, \quad u \in \mathbb{R}^n$$

та матриця

$$\Psi(t) := K \left[\Phi(s) \right] (t) \in \mathbb{D}_{n \times q}^2[a; b].$$

Шуканий розв'язок $y(t)$ невідродженої інтегро-диференціальної системи (3.1) задовольняє крайову умову (3.2) у випадку

$$Qv + Ru = 0, \quad R := \ell \Psi(\cdot) \in \mathbb{R}^{p \times q}. \quad (3.5)$$

Позначимо $P_\rho \in \mathbb{R}^{(q+n) \times \rho}$ матрицю, утворену з ρ лінійно-незалежних стовпців ортопроектора $P_{\check{Q}} : \mathbb{R}^{q+n} \rightarrow \mathbb{N}(\check{Q})$ матриці $\check{Q} := [Q; R]$. Умову (3.5) задовольняють вектори

$$u = P_1 c_\rho, \quad v = P_2 c_\rho, \quad c_\rho \in \mathbb{R}^\rho, \quad P_\rho := \text{col} (P_1, P_2), \quad P_1 \in \mathbb{R}^{n \times \rho}, \quad P_2 \in \mathbb{R}^{q \times \rho}.$$

Для знаходження вектора c_ρ , необхідного для визначення невідомих $u(c_\rho)$ та $v(c_\rho)$ отримуємо рівняння

$$\varphi(c_\rho) := \varphi(u(c_\rho), v(c_\rho)) := u(c_\rho) - \quad (3.6)$$

$$- \int_a^b F(y_0(t, c_r) + x(t, u, v), y'_0(t, c_r) + x'(t, u, v), t) dt.$$

Оскільки вектор-функція $F(y(t), y'(t), t)$ лінійна за розв'язком $y(t)$ крайової задачі (3.1), (3.2) та його похідною $y'(t)$, має місце зображення

$$F(y(t), y'(t), t) = A_1(t)y(t) + A_2(t)y'(t),$$

де

$$A_1(t) := F'_y(y(t), y'(t), t), \quad A_2(t) := F'_{y'}(y(t), y'(t), t),$$

при цьому породжуюча система неоднорідна, тому можна вважати $F(0, 0, t) \equiv 0$. Умова розв'язності лінійного рівняння (3.6):

$$\varphi(c_\rho) = \mathcal{B}_0 c_\rho + \psi(c_r), \quad \mathcal{B}_0 \in \mathbb{R}^{q \times \rho}$$

рівнозначна вимозі

$$P_{\mathcal{B}_0^*} \psi(c_r) = 0. \quad (3.7)$$

Тут

$$\mathcal{B}_0 := \int_a^b \left\{ A_1(t)[X(t)P_1 + \Psi(t)P_2] + A_2(t)[X'(t)P_1 + \Psi'(t)P_2] \right\} dt - P_2,$$

крім того

$$\psi(c_r) := - \int_a^b \left[A_1(t)y_0(t, c_r) + A_2(t)y'_0(t, c_r) \right] dt,$$

$P_{\mathcal{B}_0^*} : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{N}(\mathcal{B}_0^*)$ — ортопроектор матриці $\mathcal{B}_0^*$. За умови (3.7) розв'язок лінійного рівняння (3.6) має вигляд

$$\check{c}_\rho = \mathcal{B}_0^+ \psi(c_r) + P_{\mathcal{B}_0} c_\mu, \quad c_\rho \in \mathbb{R}^\rho;$$

тут $P_{\mathcal{B}_0} : \mathbb{R}^\rho \rightarrow \mathbb{N}(\mathcal{B}_0)$ — ортопроектор матриці $\mathcal{B}_0$. Таким чином, шуканий розв'язок невиродженої інтегро-диференціальної системи (3.1)

$$y(t, c_\mu) = Y_\mu(t)c_\mu + G[\Phi(s); \nu_0(s)](t), \quad c_\mu \in \mathbb{R}^\mu$$

для фіксованої неперервної функції $\nu_0(t) \in \mathbb{L}^2[a; b]$ зображується за допомогою узагальненого оператора Гріна

$$G[\Phi(s); \nu_0(s)](t) := G[f(s); \alpha](t) -$$

$$-\mathcal{B}_0^+ \int_a^b \left[A_1(t)G[f(s); \alpha](t) + A_2(t)G'[f(s); \alpha](t) \right] dt.$$

Тут $Y_\mu(t)$ — $(n \times \mu)$ — вимірна матриця, утворена з μ лінійно-незалежних стовпців матриці

$$\left[X_0(t) - [X_0(t)P_1 + \Psi(t)P_2]\mathcal{B}_0^+[A_1(t)X_r(t); A_2(t)X_r'(t)]dt; \right. \\ \left. [X(t)P_1 + \Psi(t)P_2]P_{B_0} \right].$$

Таким чином, доведена наступна теорема [64, 149].

Теорема 3.1.1. *У критичному випадку ($P_{Q^*} \neq 0$) породжуюча крайова задача розв'язна тоді й тільки тоді, коли виконується умова (2.4); при цьому r -параметрична сім'я розв'язків породжуючої задачі має вигляд*

$$y_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \alpha](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Шуканий розв'язок невиродженої інтегро-диференціальної крайової задачі (3.1), (3.2)

$$y(t, c_\mu) = Y_\mu(t)c_\mu + G[\Phi(s); \nu_0(s)](t), \quad c_\mu \in \mathbb{R}^\mu$$

для фіксованої неперервної функції $\nu_0(t) \in \mathbb{L}^2[a; b]$ за умови (3.7) зображується за допомогою узагальненого оператора Гріна $G[\Phi(s); \nu_0(s)](t)$.

Приклад 3.1.1. *Вимогам теореми 3.1.1 задовольняє задача про побудову 2π -періодичних розв'язків лінійної інтегро-диференціальної системи*

$$A(t)y'(t) = B(t)y(t) + \Phi(t) \int_a^b F(y(s), y'(s), s)ds + f(t); \quad (3.8)$$

тут

$$A(t) := \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & \cos t \\ -\sin t & \cos t & -\sin t \end{pmatrix}, \quad B(t) := \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t & -\sin t \\ -\cos t & -\sin t & -\cos t \end{pmatrix}, \\ f(t) := \begin{pmatrix} 1 \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad \Phi(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix},$$

крім того

$$F(y(t), y'(t), t) := A_1(t)y(t) + A_2(t)y'(t), \quad A_1(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2(t) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}.$$

Породжуюча система (3.8) задовольняє умові (3.3), тому інтегро-диференціальна система (3.8) — невироджена, причому має місце нерівність $\rho_0 \neq 0$, отже, система (3.4), розв'язана відносно похідної, залежить від довільної неперервної вектор-функції; покладемо $\nu_0(t) := 0$. Для породжуючої періодичної крайової задачі у разі системи (3.8) має місце критичний випадок, причому виконується умова розв'язності (2.4), при цьому трьохпараметрична сім'я розв'язків породжуючої задачі

$$y_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s)](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^3$$

зображується за допомогою узагальненого оператора Гріпа

$$G[f(s)](t) = \begin{pmatrix} \sin t + \sin 3t \\ \cos t - \cos 3t \end{pmatrix}$$

та нормальної фундаментальної матриці однорідної частини породжуючої системи (3.8)

$$X_0(t) = X_r(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos t & \sin t & \cos t - 1 \\ -2 \sin t & 2 \cos t & -2 \sin t \\ \cos t - 1 & \sin t & 1 + \cos t \end{pmatrix}.$$

Позначимо матриці

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Періодичний розв'язок

$$y(t) = y_0(t, c_r) + x(t), \quad x(t) = X(t)v + \Psi(t)u, \quad v = P_1 c_\rho, \quad u = P_2 c_\rho, \quad c_\rho \in \mathbb{R}^4$$

лінійної невідродженої інтегро-диференціальної системи (3.8)

$$y(t, c_\mu) = Y_\mu(t)c_\mu + G[\Phi(s); \nu_0(s)](t), \quad c_\mu \in \mathbb{R}^2$$

для фіксованої неперервної функції $\nu_0(t) := 0$ зображується за допомогою узагальненого оператора Гріна

$$G[\Phi(s); \nu_0(s)](t) = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 \sin t + \sin 2t \\ 6 - 4 \cos t - 2 \cos 2t \\ 4 \sin t + \sin 2t \end{pmatrix}$$

та матриці [149]

$$Y_\mu(t) = \frac{1}{2(1 + \pi^2)} \begin{pmatrix} 1 + \pi \sin t & (1 + 2\pi^2) \sin t \\ 0 & 2(1 + 2\pi^2) \sin t \\ -1 + \pi \sin t & (1 + 2\pi^2) \sin t \end{pmatrix}.$$

У некритичному випадку ($P_{Q^*} = 0$) лінійна невідроджена інтегрально-диференціальна крайова задача розв'язна [149] для будь-яких неоднорідностей $f(t)$ та α .

Наслідок 3.1.1. У некритичному випадку ($P_{Q^*} = 0$) r -параметрична сім'я розв'язків породжуючої задачі має вигляд

$$y_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \alpha](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Шуканий розв'язок невідродженої інтегро-диференціальної крайової задачі (3.1), (3.2)

$$y(t, c_\mu) = Y_\mu(t)c_\mu + G[\Phi(s); \nu_0(s)](t), \quad c_\mu \in \mathbb{R}^\mu$$

для фіксованої неперервної функції $\nu_0(t) \in \mathbb{L}^2[a; b]$ за умови (3.7) зображується за допомогою узагальненого оператора Гріна $G[\Phi(s); \nu_0(s)](t)$.

Приклад 3.1.2. Вимогам наслідку 3.1.1 задовольняє задача про побудову розв'язків лінійної антіперіодичної інтегро-диференціальної крайової задачі

$$\begin{aligned} A(t)y'(t) &= B(t)y(t + f(t)) + \Phi(t) \times \\ &\times \int_a^b F(y(s), y'(s), s)ds, \quad \ell y(\cdot) := y(0) + y(2\pi) = 0; \end{aligned} \quad (3.9)$$

тут

$$A(t) := \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & \cos t \\ -\sin t & \cos t & -\sin t \end{pmatrix}, \quad B(t) := \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & -\cos t \\ -\sin t & \cos t & \sin t \end{pmatrix},$$

крім того

$$\Phi(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}, \quad F(y(t), y'(t), t) := A_1(t)y(t) + A_2(t)y'(t),$$

де

$$A_1(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2(t) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}, \quad f(t) := \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Породжуюча система (3.9) задовольняє умові (3.3), тому інтегро-диференціальна система (3.9) — невинроджена, причому має місце нерівність $\rho_0 \neq 0$, отже, система (3.4), розв'язана відносно похідної, залежить від довільної неперервної вектор-функції; покладемо $\nu_0(t) := 0$. Для породжуючої періодичної крайової задачі у разі системи (3.9) має місце некритичний випадок, при цьому єдиний розв'язок породжуючої крайової задачі $y_0(t, c_r) = G[f(s)](t)$ зображується за допомогою узагальненого оператора Гріна породжуючої задачі

$$G[f(s)](t) = \frac{1}{40(1 + e^{2\pi})} \begin{pmatrix} G_1[f(s)](t) \\ G_2[f(s)](t) \\ G_3[f(s)](t) \end{pmatrix},$$

де

$$G_1[f(s)](t) = 5e^{-2\pi-t} (1 + e^{2\pi}) (-e^t - e^{2\pi+t} + 2e^{2\pi} \cos t + 2e^{2\pi} \sin t + 4e^{2\pi+t} \sin t),$$

$$G_2[f(s)](t) = 4e^{-2\pi-t} (4e^{2t} + 14e^{2\pi+2t} - 4e^{2\pi} \cos t - 4e^{4\pi} \cos t - 5e^{2\pi+t} \cos t - 5e^{4\pi+t} \cos t + 2e^{2\pi} \sin t + 2e^{4\pi} \sin t - 5e^{2\pi+t} \sin t - 5e^{4\pi+t} \sin t),$$

$$G_3[f(s)](t) = 5e^{-2\pi-t} (1 + e^{2\pi}) (-e^t - e^{2\pi+t} + 2e^{2\pi} \cos t + 2e^{2\pi} \sin t + 4e^{2\pi+t} \sin t).$$

Оскільки

$$Q = 0, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ \frac{1}{2}(-1 + e^{2\pi}) & -\pi \\ 0 & \pi \end{pmatrix},$$

отримуємо матриці

$$P_1 = \begin{pmatrix} P_{1a} & P_{1b} \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} P_{2a} & P_{2b} \end{pmatrix},$$

де

$$P_{1a} = \begin{pmatrix} \frac{(5+6e^{2\pi}+5e^{4\pi})\pi^2}{2(10+13\pi^2+6e^{2\pi}(2+\pi^2)+5e^{4\pi}(2+\pi^2))} \\ -\frac{4(1+e^{2\pi})\pi^2}{10+13\pi^2+6e^{2\pi}(2+\pi^2)+5e^{4\pi}(2+\pi^2)} \\ \frac{(5+6e^{2\pi}+5e^{4\pi})\pi^2}{2(10+13\pi^2+6e^{2\pi}(2+\pi^2)+5e^{4\pi}(2+\pi^2))} \end{pmatrix},$$

$$P_{1b} = \begin{pmatrix} -\frac{4(1+e^{2\pi})\pi^2}{10+13\pi^2+6e^{2\pi}(2+\pi^2)+5e^{4\pi}(2+\pi^2)} \\ \frac{2+9\pi^2-2e^{2\pi}(2+\pi^2)+e^{4\pi}(2+\pi^2)}{10+13\pi^2+6e^{2\pi}(2+\pi^2)+5e^{4\pi}(2+\pi^2)} \\ -\frac{4(1+e^{2\pi})\pi^2}{10+13\pi^2+6e^{2\pi}(2+\pi^2)+5e^{4\pi}(2+\pi^2)} \end{pmatrix},$$

де

$$P_{2a} = \begin{pmatrix} \frac{2(-1+e^{2\pi})\pi^2}{10+13\pi^2+6e^{2\pi}(2+\pi^2)+5e^{4\pi}(2+\pi^2)} \\ -\frac{(5+6e^{2\pi}+5e^{4\pi})\pi}{10+13\pi^2+6e^{2\pi}(2+\pi^2)+5e^{4\pi}(2+\pi^2)} \end{pmatrix},$$

$$P_{2b} = \begin{pmatrix} -\frac{2(-1+e^{2\pi})(1+e^{2\pi})(2+\pi^2)}{10+13\pi^2+6e^{2\pi}(2+\pi^2)+5e^{4\pi}(2+\pi^2)} \\ \frac{8(1+e^{2\pi})\pi}{10+13\pi^2+6e^{2\pi}(2+\pi^2)+5e^{4\pi}(2+\pi^2)} \end{pmatrix}.$$

Таким чином, отримуємо нерівність

$$\det \mathcal{B}_0 = \frac{2(-1+e^{4\pi})\pi(-1+2\pi^2)}{10+13\pi^2+6e^{2\pi}(2+\pi^2)+5e^{4\pi}(2+\pi^2)} \neq 0.$$

Остання нерівність у випадку лінійної інтегро-диференціальної крайової задачі (3.9) забезпечує виконання умови (3.7). Шуканий розв'язок лінійної інтегро-диференціальної крайової задачі (3.9) для фіксованої неперервної функції $\nu_0(t) := 0$ єдиний $y(t) = G[\Phi(s); \nu_0(s)](t)$ і зображується за допомогою узагальненого оператора Гріна лінійної інтегро-диференціальної

крайової задачі (3.9)

$$G[\Phi(s); \nu_0(s)](t) = \frac{1}{40(1 + e^{2\pi})(-1 + 2\pi^2)} \begin{pmatrix} G_1[\Phi(s); \nu_0(s)](t) \\ G_2[\Phi(s); \nu_0(s)](t) \\ G_3[\Phi(s); \nu_0(s)](t) \end{pmatrix},$$

де

$$\begin{aligned} G_1[\Phi(s); \nu_0(s)](t) &= -5e^{-2\pi-t}(1 + e^{2\pi})(e^t(1 + \pi) \times \\ &\quad \times (-1 + e^{2\pi}(-1 + 2\pi)) + (e^{2\pi}(2 - 4\pi^2) - \\ &\quad - e^{2\pi+t}t + e^t(1 + 2\pi)t) \cos t + (e^{2\pi}(2 - 4\pi^2) + e^t(-2 - 3\pi + \pi^2) + e^{2\pi+t} \times \\ &\quad \times (6 - \pi - 9\pi^2 + 2\pi^3)) \sin t), \\ G_2[\Phi(s); \nu_0(s)](t) &= e^{-2\pi-t}(-2e^{2t}(3 - \pi^2 + e^{2\pi}(33 - 10\pi - 61\pi^2 + 10\pi^3)) + \\ &\quad + (1 + e^{2\pi})(e^{2\pi}(16 - 32\pi^2) + \\ &\quad + 5e^{2\pi+t}(5 - \pi - 9\pi^2 + 2\pi^3 - t) + 5e^t(-1 + \pi^2 + t + \pi(-1 + 2t))) \cos t + \\ &\quad + (1 + e^{2\pi})(8e^{2\pi}(-1 + 2\pi^2) + 5e^{2\pi+t}(6 - \pi - 9\pi^2 + 2\pi^3 + t) + 5e^t(-2 + \pi^2 - t - \\ &\quad - \pi(3 + 2t))) \sin t), \\ G_3[\Phi(s); \nu_0(s)](t) &= -5e^{-2\pi-t}(1 + e^{2\pi})(e^t(1 + \pi)(-1 + e^{2\pi}(-1 + 2\pi)) + \\ &\quad + (e^{2\pi}(2 - 4\pi^2) - e^{2\pi+t}t + e^t(1 + 2\pi)t) \cos t + (e^{2\pi}(2 - 4\pi^2) + \\ &\quad + e^t(-2 - 3\pi + \pi^2) + e^{2\pi+t}(6 - \pi - 9\pi^2 + 2\pi^3)) \sin t). \end{aligned}$$

У випадку виродженості: $P_{A^*(t)} \neq 0$ лінійної інтегро-диференціальної крайової задачі (3.1), (3.2) для її дослідження можна використовувати схему [57]. У випадку нерозв'язності лінійної інтегрально-диференціальної крайової задачі (3.1), (3.2) її можна регуляризувати аналогічно [34, 53, 148]. Зазначимо також, що запропонована у статті схема дослідження лінійної невивродженої інтегрально-диференціальної крайової задачі (3.1), (3.2) може бути перенесена на невивроджені інтегро-диференціальні крайові задачі з запізненням [36]. І, нарешті, доведена теорема узагальнює результати дослідження лінійної інтегро-диференціальної крайової задачі [31, 64] на випадок лінійної крайової задачі (3.1) з прямокутною матрицею при похідній [40, 57].

3.2. Нелінійні інтегро-диференціальні крайові задачі, не розв'язані відносно похідної

Досліджуємо задачу про побудову розв'язків [36]

$$y(t) \in \mathbb{D}^2[a; b], \quad y'(t) \in \mathbb{L}^2[a; b]$$

нелінійної інтегро-диференціальної системи, не розв'язаної відносно похідної (2.1), підпорядкованих крайовій умові (2.2). Розв'язок крайової задачі (2.1), (2.2) шукаємо в околі розв'язку

$$y_0(t) \in \mathbb{D}^2[a; b], \quad y'_0(t) \in \mathbb{L}^2[a; b]$$

породжуючої нетерової $n \neq p$ крайової задачі (2.3). Тут

$$A(t), B(t) \in \mathbb{L}_{m \times n}^2[a; b] := \mathbb{L}^2[a; b] \otimes \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \Phi(t) \in \mathbb{L}_{m \times q}^2[a; b], \quad f(t) \in \mathbb{L}^2[a; b].$$

Матрицю $A(t)$ припускаємо прямокутною, або ж квадратною, але виродженою матрицею сталого рангу. Нелінійна функція $F(y(t), y'(t), t)$ двічі неперервно-диференційовна за розв'язком $y(t)$ крайової задачі (2.1), (2.2) та його похідною $y'(t)$ в околі розв'язку породжуючої крайової задачі та його похідної, а також неперервна за третім аргументом на відрізьку $[a; b]$; $\ell y(\cdot) : \mathbb{D}^2[a; b] \rightarrow \mathbb{R}^v$ — лінійний обмежений векторний функціонал, визначений на просторі $\mathbb{D}^2[a; b]$ n -вимірних абсолютно неперервних на відрізьку $[a, b]$ функцій [36]. Поставлена задача продовжує дослідження лінійної інтегро-диференціальної крайової задачі [149] на випадок нелінійної крайової задачі (2.1), (2.2) з прямокутною матрицею при похідній [40, 57].

Припустимо, що для породжуючої крайової задачі (2.3) виконуються вимоги теореми у статті [57, с. 15]. За цих умов у випадку виродження порядку p для довільної фіксованої неперервної вектор-функції $\nu_p(t)$ диференціально-алгебраїчна система (2.3) має розв'язок вигляду

$$y_0(t, c_{\rho_{p-1}}) = X_p(t)c_{\rho_{p-1}} + K \left[f(s), \nu_p(s) \right] (t), \quad c_{\rho_{p-1}} \in \mathbb{R}^{\rho_{p-1}}.$$

Породжуюча крайова задача (2.3) розв'язна тоді і тільки тоді, коли

$$P_{Q^*} \left\{ \alpha - \ell K \left[f(s), \nu_p(s) \right] (\cdot) \right\} = 0. \quad (3.10)$$

Тут $K[f(s), \nu_p(s)](t)$ — узагальнений оператор Гріна задачі Коші для диференціально-алгебраїчної системи (2.3), P_{Q^*} — матриця-ортопроектор:

$$\mathbb{R}^v \rightarrow \mathbb{N}(Q^*), \quad Q := \ell X_p(\cdot) \in \mathbb{R}^{v \times \rho_{p-1}}.$$

У випадку (3.10) породжуюча крайова задача (2.3) має r -параметричну сім'ю розв'язків

$$y_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \alpha](t), \quad X_r(t) := X_p(t)P_{Q_r}, \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

зображується за допомогою узагальненого оператора Гріна [57]

$$G[f(s); \alpha](t) := X_p(t) Q^+ \left\{ \alpha - \ell K[f(s), \nu_p(s)](\cdot) \right\} + K[f(s), \nu_p(s)](t);$$

матриця $P_{Q_r} \in \mathbb{R}^{v \times r}$, утворена з r лінійно-незалежних стовпців матриці-ортопроектора P_Q . У критичному випадку $P_{Q^*} \neq 0$ для фіксованої функції $\nu_p(t) \in \mathbb{L}^2[a; b]$ розв'язок крайової задачі (2.1), (2.2) шукаємо у вигляді $y(t) = y_0(t, c_r) + x(t)$. Для знаходження відхилення

$$x(t) \in \mathbb{D}^2[a; b], \quad x'(t) \in \mathbb{L}^2[a; b]$$

від породжуючого розв'язку $y_0(t, c_r)$ отримуємо крайову задачу

$$A(t)x'(t) = B(t)x(t) + \Phi(t) \int_a^b F(y(s), y'(s), s) ds, \quad \ell y(\cdot) = 0. \quad (3.11)$$

Відхилення $x(t, u, v) = X_p(t)u + \Psi(t)v$ від породжуючого розв'язку $y_0(t, c_r)$ визначають невідомі сталі

$$v := \int_a^b F(y(s), y'(s), s) ds \in \mathbb{R}^q, \quad u \in \mathbb{R}^n$$

та матриця

$$\Psi(t) := K \left[\Phi(s) \right] (t) \in \mathbb{D}_{n \times q}^2[a; b].$$

Шуканий розв'язок $y(t)$ виродженої інтегро-диференціальної системи (3.11) задовольняє крайову умову (3.11) у випадку

$$Qv + Ru = 0, \quad R := \ell \Psi(\cdot) \in \mathbb{R}^{v \times q}. \quad (3.12)$$

Позначимо $P_{R_\omega} \in \mathbb{R}^{q \times \omega}$ матрицю, утворену з ω лінійно-незалежних стовпців ортопроектора $P_R : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{N}(R)$. Умову (3.12) задовольняють вектори

$$u(c_r) = P_{Q_r} c_r, \quad v(c_\omega) = P_{R_\omega} c_\omega, \quad c_r \in \mathbb{R}^r, \quad c_\omega \in \mathbb{R}^\omega.$$

Для знаходження вектора

$$\check{c} := \begin{pmatrix} c_r \\ c_r \\ c_\omega \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2r+\omega},$$

необхідного для визначення невідомих $u(c_r)$ та $v(c_\omega)$ отримуємо рівняння (2.8); тут

$$\varphi(\check{c}) := u(c_0) - \int_a^b F(y_0(t, c_r) + x(t, u(c_0), v(c_1)), y'_0(t, c_r) + x'(t, u(c_0), v(c_1)), t) dt$$

— нелінійна вектор-функція: $\varphi(\check{c}) : \mathbb{R}^{2r+\omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Якщо для отриманого рівняння (2.8) справджуються умови теореми [55], знаходимо невідомі $u(c_0)$ та $v(c_1)$. Таким чином, доведена наступна теорема [68].

Теорема 3.2.1. *Припустимо, що для породжуючої крайової задачі (2.3) з прямокутною, або ж квадратною, але виродженою матрицею $A(t)$ сталого рангу, виконуються вимоги теореми у статті [57, с. 15]. За цих умов у випадку виродження порядку p у критичному випадку ($P_{Q^*} \neq 0$) для довільної фіксованої неперервної вектор-функції $\nu_p(t)$ породжуюча диференціально-алгебраїчна крайова задача (2.3) розв'язна тоді й тільки тоді, коли виконується умова (3.10); при цьому r -параметрична сім'я розв'язків породжуючої задачі (2.3) має вигляд*

$$y_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \alpha](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Шуканий розв'язок

$y(t) = y_0(t, c_r) + x(t)$, $x(t) = X_p(t)v + \Psi(t)u$, $u(c_r) = P_{Q_r} c_r$, $v(c_\omega) = P_{R_\omega} c_\omega$ нелінійної крайової задачі (2.1), (2.2), не розв'язаної відносно похідної, визначає вектор $\check{c}$, який задовольняє нелінійне рівняння (2.8). Припустимо, що для рівняння (2.8) виконуються наступні умови

1. Нелінійна вектор-функція $\varphi(\check{c})$, двічі неперервно диференційовна по $\check{c}$ в області $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{2r+\omega}$, в околі точки $\check{c}_0$ має корінь $\check{c}$.

2. В околі нульового наближення $\check{c}_0 \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ мають місце нерівності

$$\|J_k^+\| \leq \sigma_1(k), \quad \|d^2\varphi(\xi_k; \check{c} - \check{c}_k)\| \leq \sigma_2(k) \cdot \|\check{c} - \check{c}_k\|.$$

3. Існує константа

$$\theta := \sup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{\sigma_1(k)\sigma_2(k)}{2} \right\}.$$

Тоді за умови (1.11) для знаходження вектора $\check{c}$ застосовна ітераційна схема (1.12) при цьому швидкість збіжності послідовності наближень до розв'язку рівняння (2.8) квадратична.

Тут $P_{J_k^*} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{N}(J_k^*)$ — ортопроектор матриці J_k^* , J_k^+ — псевдообернена (за Муром — Пенроузом) матриця [36]. Зазначимо, що умова (1.11) рівнозначна вимозі повноти рангу матриці J_k і виконується лише у випадку $n \leq 2r + \omega$. У випадку $n = 2r + \omega$ для знаходження вектора $\check{c}$ застосовна теорема [88, с. 680]. Запропонована схема дослідження нелінійної інтегро-диференціальної крайової задачі (2.1), (2.2), не розв'язаної відносно похідної, узагальнює відповідні результати, отримані для лінійної інтегро-диференціальної крайової задачі, розв'язаної відносно похідної. Крім того, запропонована у статті схема дослідження нелінійної інтегро-диференціальної крайової задачі (2.1), (2.2) аналогічно [141] може бути перенесена на нелінійні інтегро-диференціальні крайові задачі, не розв'язані відносно похідної в абстрактних просторах.

Приклад 3.2.1. Умови доведеної теореми 3.2.1 справджуються у випадку періодичної крайової задачі

$$A(t)y'(t) = B(t)y(t) + \Phi(t) \int_0^{2\pi} F(y(s), y'(s), s)ds + f(t), \quad z(0) - z(2\pi) = 0, \quad (3.13)$$

де зокрема

$$A(t) := \begin{pmatrix} \cos t & 0 & \sin t \\ -\sin t & 0 & \cos t \\ \cos t & \cos t & \sin t \\ -\sin t & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad B(t) := \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t & -\sin t \\ -\cos t & -\sin t & -\cos t \\ -\sin t & \cos t & -\sin t \\ -\cos t & -\sin t & -\cos t \end{pmatrix},$$

$$f(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi(t) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad F(y(t), y'(t), t) := y(t) (y'(t))^* y(t).$$

Оскільки

$$P_{A^*(t)} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 - \cos 2t & \sin 2t & \cos 2t - 1 & -\sin 2t \\ \sin 2t & 1 + \cos 2t & -\sin 2t & -1 - \cos 2t \\ \cos 2t - 1 & -\sin 2t & 1 - \cos 2t & \sin 2t \\ -\sin 2t & -1 - \cos 2t & \sin 2t & 1 + \cos 2t \end{pmatrix} \neq 0,$$

породжуюча система для нелінійного рівняння (3.13) вироджена, але матриця $A(t)$ — сталого рангу. Для породжуючої системи для нелінійного рівняння (3.13) виконуються вимоги теореми у статті [57, с. 15], причому має місце виродження першого порядку: $p = 1$. Породжуюча система для нелінійного рівняння (3.13) має розв'язок [68]

$$y(t, c_3) = X_1(t) c_3 + K \left[f(s) \right] (t), \quad c_3 \in \mathbb{R}^3,$$

незалежний від вектор-функції $\nu_1(t)$; тут

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 \\ e^{-t} - 1 & e^{-t} & 1 - e^{-t} - t \end{pmatrix}, \quad K \left[f(s) \right] (t) = \begin{pmatrix} \cos t - 1 \\ 0 \\ 1 - e^{-t} \end{pmatrix}$$

— узагальнений оператор Гріна задачі Коші для породжуючої диференціально-алгебраїчної системи у разі нелінійного рівняння (3.13). Для породжуючої періодичної крайової задачі для рівняння (3.13) має місце крити-

чний випадок

$$P_{Q^*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0, \quad P_Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

причому виконується умова (3.10); при цьому породжуюча крайова задача має розв'язок, не залежний від довільної неперервної вектор-функції $\nu_1(t)$

$$y_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); 0](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^1,$$

який зображується за допомогою узагальненого оператора Гріпа

$$G[f(s); \alpha](t) = \begin{pmatrix} 2 \cos t - 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

та матриці

$$X_r(t) := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2\pi \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 - e^{-2\pi} & 1 - e^{-2\pi} & e^{-2\pi} - 1 + 2\pi \end{pmatrix}, \quad R = (e^{-2\pi} - 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

отримуємо матриці

$$P_{Q_r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_{R_\omega} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Періодичний розв'язок крайової задачі (3.13)

$$y(t) = y_0(t, c_r) + x(t), \quad x(t) = X(t)v + \Psi(t)u, \quad u(c_r) = P_{Q_r} c_r, \quad v(c_\omega) = P_{R_\omega} c_\omega,$$

не розв'язаної відносно похідної, визначає вектор $\check{c}$, який задовольняє нелінійне рівняння (2.8); тут

$$\varphi(\check{c}) = \begin{pmatrix} 2c_3 - c_4 \\ -c_3 + 2c_4 \\ -c_3 - c_4 + \pi(-4 - 3c_1 + 6c_1^2 - 3c_2 + 12c_1c_2 + 6c_2^2) \end{pmatrix}, \quad \check{c} \in \mathbb{R}^4.$$

Для знаходження константи $\check{c}$ застосовна ітераційна схема (1.12), дійсно: за умови

$$\check{c}_0 := -\frac{3}{5} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^*$$

на першому кроці отримуємо $P_{J_0^*} = 0$, при цьому

$$\check{c}_1 \approx \begin{pmatrix} -0.006\,666\,666\,666\,666\,672 \\ -0.606\,666\,666\,666\,666\,667 \\ 3,26\,987\,671\,688\,309 \times 10^{-19} \\ -2,17\,991\,781\,125\,540 \times 10^{-18} \end{pmatrix}, \quad \|\varphi(\check{c}_1)\|_\infty \approx 0,304\,944,$$

що дозволяє на першому кроці перевірити виконання умови збіжності: $\theta \cdot \|\check{c}_1 - \check{c}_0\| \approx 0,502\,655 < 1$. На другому кроці отримуємо $P_{J_1^*} = 0$, при цьому

$$\check{c}_2 \approx \begin{pmatrix} -0,001\,981\,981\,981\,981\,969 \\ -0,601\,981\,981\,981\,982 \\ -4,430\,319\,631\,741\,398 \times 10^{-18} \\ -6,298\,327\,536\,169\,676 \times 10^{-18} \end{pmatrix}, \quad \|\varphi(\check{c}_2)\|_\infty \approx 0,001\,654\,710,$$

що дозволяє на другому кроці перевірити виконання умови збіжності: $\theta \cdot \|\check{c}_2 - \check{c}_0\| \approx 0,149\,438 < 1$. На третьому кроці отримуємо $P_{J_2^*} = 0$, при цьому

$$\check{c}_3 \approx \begin{pmatrix} -0,001\,956\,282\,688\,427\,426 \\ -0,601\,956\,282\,688\,427\,400 \\ 8,620\,362\,108\,791\,506 \times 10^{-20} \\ 8,997\,110\,504\,805\,289 \times 10^{-20} \end{pmatrix}, \quad \|\varphi(\check{c}_3)\|_\infty \approx 4,97\,970 \times 10^{-8},$$

що дозволяє на третьому кроці перевірити виконання умови збіжності: $\theta \cdot \|\check{c}_3 - \check{c}_0\| \approx 0,1475 < 1$. І, нарешті, на третьому кроці отримуємо $P_{J_3^*} = 0$, при цьому

$$\check{c}_3 \approx \begin{pmatrix} -0,001\,956\,281\,914\,983\,282 \\ -0,601\,956\,281\,914\,983 \\ -1,970\,636\,906\,103\,693 \times 10^{-25} \\ 8,908\,358\,608\,718\,355 \times 10^{-20} \end{pmatrix}, \quad \|\varphi(\check{c}_3)\|_\infty \approx 2,79\,029 \times 10^{-15}.$$

Таким чином, знаходимо наближення до періодичного розв'язку нелінійної інтегро-диференціальної крайової задачі (3.13)

$$y(t) \approx \begin{pmatrix} -\frac{46}{42} \frac{845}{435} \frac{617}{985} + \cos t \\ 0 \\ -\frac{46}{42} \frac{845}{435} \frac{617}{985} \end{pmatrix}.$$

Для оцінки точності знайденого наближення до періодичного розв'язку інтегро-диференціальної системи (3.13) визначимо нев'язку

$$\left\| \left\| A(t)y'(t) - B(t)y(t) + \Phi(t) \int_0^{2\pi} F(y(s), y'(s), s) ds + f(t) \right\|_{\mathbb{C}[0;2\pi]} \right\|_{\infty} \approx 1,77\,636 \times 10^{-15}.$$

Крім того, відзначимо періодичність отриманого наближення. У частинному випадку рівняння (2.8) може бути лінійним:

$$\varphi(\check{c}) := \mathcal{B} \check{c} + d, \quad \mathcal{B} := \varphi'(\check{c}) \in \mathbb{R}^{n \times (r+\omega_0+\omega_1)}, \quad d := \varphi(\check{c}) - \mathcal{B} \check{c} \in \mathbb{R}^n$$

умова розв'язності якого рівнозначна вимозі

$$P_{\mathcal{B}^*} d = 0. \tag{3.14}$$

Тут $P_{\mathcal{B}^*} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{N}(\mathcal{B}^*)$ — ортопроектор матриці $\mathcal{B}^*$. За умови (3.14) розв'язок лінійного рівняння (3.14) має вигляд

$$\check{c} = P_{\mathcal{B}_\mu} c_\mu - \mathcal{B}^+ d, \quad c_\mu \in \mathbb{R}^\mu;$$

тут

$$P_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}^{(r+\omega_0+\omega_1)} \rightarrow \mathbb{N}(\mathcal{B})$$

— ортопроектор матриці $\mathcal{B}$; матриця $P_{\mathcal{B}_\mu} \in \mathbb{R}^{n \times \mu}$, утворена з μ лінійно-незалежних стовпців матриці-ортопроектора $P_{\mathcal{B}}$. Позначимо матриці

$$\mathcal{P}_1 := \begin{pmatrix} I_r & O & O \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{r \times (r+\omega_0+\omega_1)}, \quad \mathcal{P}_2 := \begin{pmatrix} O & I_{\omega_0} & O \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\omega_0 \times (r+\omega_0+\omega_1)},$$

$$\mathcal{P}_3 := \begin{pmatrix} O & O & I_{\omega_1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\omega_1 \times (r+\omega_0+\omega_1)}.$$

Таким чином, доведено наступне твердження [68].

Наслідок 3.2.1. Припустимо, що для породжуючої крайової задачі (2.3) з прямокутною, або ж квадратною, але виродженою матрицею $A(t)$ сталого рангу, виконуються вимоги теореми у статті [57, с. 15]. За цих умов у випадку виродження порядку p у критичному випадку ($P_{Q^*} \neq 0$) для довільної фіксованої неперервної вектор-функції $\nu_p(t)$ породжуюча диференціально-алгебраїчна крайова задача (2.3) розв'язна тоді й тільки тоді, коли виконується умова (3.10); при цьому r -параметрична сім'я розв'язків породжуючої задачі (2.3) має вигляд

$$y_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s); \alpha](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Шуканий розв'язок

$y(t) = y_0(t, c_r) + x(t)$, $x(t) = X(t)v + \Psi(t)u$, $u(c_0) = P_0 c_0$, $v(c_1) = P_1 c_1$ нелінійної крайової задачі (2.1), (2.2), не розв'язаної відносно похідної, визначає вектор $\check{c}$, який задовольняє рівняння (2.8). Якщо рівняння (2.8) лінійне:

$$\varphi(\check{c}) := \mathcal{B}\check{c} + d, \quad \mathcal{B} := \varphi'(\check{c}) \in \mathbb{R}^{n \times (r + \omega_0 + \omega_1)}, \quad d := \varphi(\check{c}) - \mathcal{B}\check{c} \in \mathbb{R}^n,$$

за умови (3.14) розв'язок нелінійної інтегро-диференціальної крайової задачі (2.1), (2.2), не розв'язаної відносно похідної, має вигляд

$$y(t, c_\mu) = V(t)c_\mu + W(t), \quad V(t) := U(t)P_{B_\mu}, \quad c_\mu \in \mathbb{R}^\mu;$$

тут

$$U(t) := X_r(t)\mathcal{P}_1 + X_p(t)\mathcal{P}_2 + \Psi(t)\mathcal{P}_1, \quad W(t) := G[f(s); \alpha](t) - U(t)\mathcal{B}^+d.$$

Приклад 3.2.2. Умови доведеного наслідку 3.2.1 справджуються у випадку періодичної крайової задачі

$$\begin{aligned} A(t)y'(t) &= B(t)y(t) + \Phi(t) \int_0^{2\pi} F(y(s), y'(s), s)ds + f(t), \\ z(0) - z(2\pi) &= 0, \end{aligned} \quad (3.15)$$

де матриці $A(t), B(t), \Phi(t)$ наведено у прикладі 3.2.1, крім того

$$F(y(t), y'(t), t) := \Omega(t) \left(1 - y(t) (y'(t))^* \right) y(t), \quad \Omega(t) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2t & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Як встановлено у прикладі 3.2.1, породжуюча система для нелінійного рівняння (3.13) вироджена, але матриця $A(t)$ — сталого рангу. Для породжуючої системи для нелінійного рівняння (3.13) виконуються вимоги теореми у статті [57, с. 15], причому має місце виродження першого порядку: $p = 1$. Крім того, у прикладі 3.2.1 знайдено породжуючий розв’язок $y(t, c_3) = X_1(t) c_3$, незалежний від вектор-функції $\nu_1(t)$. У випадку породжуючої періодичної крайової задачі для рівняння (3.13) має місце критичний випадок, причому виконується умова (3.10); при цьому породжуюча крайова задача має розв’язок, не залежний від довільної неперервної вектор-функції $\nu_1(t)$

$$y_0(t, c_r) = X_r(t) c_r + G[f(s); 0](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^1.$$

Шуканий періодичний розв’язок крайової задачі (3.15)

$$y(t) = y_0(t, c_r) + x(t), \quad x(t) = X(t)v + \Psi(t)u, \quad u(c_0) = P_0 c_0, \quad v(c_1) = P_1 c_1$$

інтегро-диференціальної крайової задачі (2.1), (2.2), не розв’язаної відносно похідної, визначає вектор $\check{c}$, який задовольняє нелінійне рівняння (2.8); тут [68]

$$\varphi(\check{c}) = \begin{pmatrix} 2c_3 - c_4 \\ -c_3 + 2c_4 \\ -c_3 - c_4 \end{pmatrix} := \mathcal{B} \check{c}, \quad \mathcal{B} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \check{c} \in \mathbb{R}^4,$$

причому умову розв’язності (3.14) виконано. Таким чином, знаходимо однопараметричний періодичний розв’язок інтегро-диференціальної крайової задачі (3.15)

$$y(t, c_1) = \begin{pmatrix} c_1 - 1 + 2 \cos t \\ 0 \\ 1 - c_1 \end{pmatrix}, \quad c_1 \in \mathbb{R}^1.$$

Зазначимо, що у випадку нерозв’язності інтегро-диференціальної крайової задачі (2.1), (2.2) її можна регуляризувати аналогічно [53]. Зазначимо також, що запропонована схема дослідження нелінійної інтегро-диференціальної крайової задачі (2.1), (2.2) може бути перенесена на інтегро-диференціальні крайові задачі з запізненням [6, 36, 60, 73].

3.3. Положення рівноваги нелінійних інтегро-диференціальних крайових задач, не розв'язаних відносно похідної

Досліджуємо задачу про побудову T – періодичного розв'язку [68, 36, 113]

$$z(t) \in \mathbb{D}^2[a; b], \quad z'(t) \in \mathbb{L}^2[a; b]$$

нелінійної інтегро-диференціальної крайової задачі

$$A(t)z'(t) = B(t)z(t) + \Phi(t) \int_a^b F(z(s), z'(s), s) ds + f(t), \quad (3.16)$$

$$\ell z(\cdot) = \alpha + Jz(\cdot),$$

не розв'язаної відносно похідної. Розв'язок періодичної задачі для рівняння (3.16) шукаємо в околі T – періодичного розв'язку

$$z_0(t) \in \mathbb{D}^2[a; b], \quad z'_0(t) \in \mathbb{L}^2[a; b]$$

породжуючої крайової задачі

$$z'_0(t) = A(t)z_0(t) + f(t), \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha.$$

Тут

$$A(t), B(t) \in \mathbb{L}_{m \times n}^2[a; b] := \mathbb{L}^2[a; b] \otimes \mathbb{R}^{m \times n},$$

$$\Phi(t) \in \mathbb{L}_{m \times q}^2[a; b], \quad f(t) \in \mathbb{L}^2[a; b].$$

Матрицю $A(t)$ припускаємо прямокутною, або ж квадратною, але виродженою. Крім того $\ell z(\cdot) : \mathbb{D}^2[a; b] \rightarrow \mathbb{R}^p$ — лінійний обмежений векторний функціонал, визначений на просторі $\mathbb{D}^2[a; b]$ n -вимірних абсолютно неперервних на відрізьку $[a, b]$ функцій; $Jz(\cdot)$ — нелінійний обмежений векторний функціонал, визначений на цьому ж просторі. Нелінійну функцію $F(z, z', t)$ та нелінійний функціонал $Jz(\cdot)$ вважаємо двічі неперервно-диференційовними по z та z' у деякій області $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Крім того, функція $F(z, z', t)$ неперервна по t на відрізьку $[a; b]$. Поставлена задача з одного боку продовжує дослідження нелінійних інтегрально-диференціальних крайових задач [31, 36, 68, 113], з

іншого боку, поставлена задача продовжує дослідження положень рівноваги нелінійних диференціальних та диференціально-алгебраїчних крайових задач [146]. Називатимемо положенням рівноваги нелінійної інтегро-диференціальної системи (3.16) функцію $z(t) \in \mathbb{D}^2[a; b]$, $z'(t) \in \mathbb{L}^2[a; b]$ яка задовольняє двом умовам [146]:

$$A(t)z'(t) = 0, \quad B(t)z(t) + f(t) + \Phi(t) \int_a^b F(z(s), z'(s), s) ds = 0. \quad (3.17)$$

У найпростішому випадку, за умови

$$B(t) \equiv B, \quad f(t) \equiv f, \quad \Phi(t) \equiv \Phi - \text{const}, \quad F(z, z', t) \equiv F(z, z')$$

положення рівноваги $z(t) \equiv z - \text{const}$ нелінійної інтегро-диференціальної системи (3.16) будемо називати стаціонарними. Стаціонарні положення рівноваги нелінійної інтегро-диференціальної системи (3.16) визначає рівняння

$$\varphi(z) := Bz + f + (b - a) \Phi F(z, z') = 0. \quad (3.18)$$

Функція $\varphi(z) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \neq n$ двічі неперервно-диференційовна по z в області Ω . Для побудови ітераційної схеми, збіжної до розв'язку рівняння (3.18) використаємо метод Ньютона – Канторовича [55, 131].

Лема 3.3.1. *Припустимо, що для рівняння (3.18) виконані наступні умови*

1. *Нелінійна вектор-функція $\varphi(z) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, двічі неперервно-диференційовна в околі точки z_0 , має корінь $z^* \in \mathbb{R}^n$.*
2. *У заданому околі нульового наближення z_0 мають місце нерівності*

$$\left\| J_k^+ \right\| \leq \sigma_1(k), \quad \left\| d^2 \varphi(\xi_k; z^* - z_k) \right\| \leq \sigma_2(k) \cdot \|z^* - z_k\|. \quad (3.19)$$

3. *Існує константа*

$$\theta := \sup_{k \in N} \left\{ \frac{\sigma_1(k) \sigma_2(k)}{2} \right\}$$

Тоді за умов (1.8) та (1.13) для знаходження розв'язку z^* рівняння (3.18) може бути використана ітераційна схема

$$z_{k+1} = z_k - J_k^+ \varphi(z_k), \quad (3.20)$$

при цьому швидкість збіжності послідовності $\{z_k\}$ до розв'язку z^* рівняння (3.18) квадратична. Вектор-функція z^* за умови

$$B(t) \equiv B, \quad f(t) \equiv f, \quad \Phi(t) \equiv \Phi - \text{const}, \quad F(z, z', t) \equiv F(z, z')$$

є положенням рівноваги нелінійної інтегро-диференціальної системи (3.16). Тут $P_{J_k^*} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{N}(J_k^*)$ — ортопроектор матриці $J_k^* \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Зауважимо, що умова (1.11) рівнозначна до вимоги повноти матриці J_k і можлива лише у випадку $m \leq n$.

Приклад 3.3.1. Вимоги лемми 3.3.1 задовольняє нелінійна інтегрально-диференціальна система

$$A(t) z'(t) = B(t) z(t) + \Phi(t) \int_0^1 F(z(s), z'(s), s) ds, \quad (3.21)$$

де

$$A(t) := \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & \cos t \\ \sin t & \cos t & \sin t \end{pmatrix}, \quad B(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F(z(t), z'(t)) := - \begin{pmatrix} \cos u(t) \\ \cos v(t) \\ \cos w(t) \end{pmatrix}, \quad z(t) := \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}.$$

Вектор-функція $\varphi(z) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ визначена в довільній відкритій області $D \subset \mathbb{R}^3$ і двічі неперервно-диференційовна по z в околі $\Omega \subseteq D$. Покладемо $z_0 := \left(0,7 \quad 0,7 \quad 0,7 \right)^*$, при цьому

$$\text{rank} [\varphi'(z_0)] = 2, \quad \|\varphi(z_0)\|_\infty \approx 0,0648 \, 422,$$

крім того

$$z_1 \approx \begin{pmatrix} 0,720 \, 285 \\ 0,751 \, 774 \\ 0,731 \, 488 \end{pmatrix}, \quad \|\varphi(z_1)\|_\infty \approx 0,00 \, 100 \, 997.$$

Далі $\text{rank} [\varphi'(z_1)] = 2$, крім того

$$\left\| [\varphi'(z_1)]^+ \right\|_{\infty} := \sigma_1(1) \approx 1,29\,305, \quad \left\| d^2\varphi(z_1) \right\|_{\infty} := \sigma_2(1) \approx 0,751\,617.$$

при цьому виконано умову (1.13)

$$\theta_1 \cdot \|z_1 - z_0\|_{\infty} \approx 0,0251\,591 \ll 1, \quad \theta_1 := \frac{\sigma_1(1)\sigma_2(1)}{2} \approx 0,485\,941,$$

тому знаходимо

$$z_2 \approx \begin{pmatrix} 0,720\,471 \\ 0,751\,495 \\ 0,730\,669 \end{pmatrix}, \quad \|\varphi(z_2)\|_{\infty} \approx \times 10^{-16}$$

Далі $\text{rank} [\varphi'(z_2)] = 2$, крім того

$$\left\| [\varphi'(z_2)]^+ \right\|_{\infty} := \sigma_1(2) \approx 1,29\,305, \quad \left\| d^2\varphi(z_2) \right\|_{\infty} := \sigma_2(2) \approx 0,751\,617.$$

при цьому виконано умову

$$\theta_2 \cdot \|z_2 - z_0\|_{\infty} \approx 0,0251\,591 \ll 1, \quad \theta_2 := \frac{\sigma_1(1)\sigma_2(1)}{2} \approx 0,485\,941,$$

тому знаходимо

$$z_3 \approx \begin{pmatrix} 0,720\,471 \\ 0,751\,495 \\ 0,730\,669 \end{pmatrix}, \quad \text{rank} [\varphi'(z_3)] = 2,$$

при цьому

$$\|\varphi(z_3)\|_{\infty} \approx 1,11\,022 \times 10^{-16}.$$

Припустимо, далі що для рівняння (1.8) не виконані умови доведеної леми, а саме: припустимо, що для рівняння (1.8) не виконано умову (1.11): $P_{J_k^*} \neq 0$, або не виконано умову

$$B(t) \equiv B, \quad f(t) \equiv f, \quad \Phi(t) \equiv \Phi - \text{const}, \quad F(z, z', t) \equiv F(z, z').$$

Позначимо $\Psi(t) \in \mathbb{L}^2[a, b] - (\rho \times \rho)$ – вимірну невідроджену матрицю. У випадку

$$P_{A_{\rho}(t)}\Phi(t) \in \mathbb{L}^2[a, b]$$

першу із умов (3.17) задовольняє вектор

$$z(t) = P_{A_\rho(t)}x(t), \quad x(t) \in \mathbb{C}^1[a, b], \quad x(t) = \Psi(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^\rho.$$

За умови

$$B_\rho(t) := B(t)P_{A_\rho(t)}\Psi(t) \equiv B_\rho,$$

а також

$$f(t) \equiv f, \quad \Phi(t) \equiv \Phi, \quad F(z, z', t) \equiv F(z, z') - \text{const}$$

положення рівноваги $z(t) := P_{A_\rho(t)}\Psi(t)y$ будемо називати нестационарним положенням рівноваги нелінійної інтегрально-диференціальної системи (2.1). Нестационарні положення рівноваги нелінійної інтегрально-диференціальної системи (2.1) визначає рівняння

$$\varphi_\rho(y) := B_\rho y + (b - a) \Phi F(P_{A_\rho(t)}\Psi(t)y, (P_{A_\rho(t)}\Psi(t))'y) = 0. \quad (3.22)$$

Функція $\varphi_\rho(y) : \mathbb{R}^\rho \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\rho \neq m$ двічі неперервно-диференційовна по y . Для побудови ітераційної схеми, збіжної до розв'язку рівняння (3.22), використаємо метод Ньютона – Канторовича [55, 131].

Лема 3.3.2. *Припустимо, що для рівняння (3.22) виконані наступні умови*

1. *Нелінійна вектор-функція $\varphi_\rho(y) : \mathbb{R}^\rho \rightarrow \mathbb{R}^m$, двічі неперервно-диференційовна в околі точки y_0 має корінь $y^* \in \mathbb{R}^\rho$.*

2. *У заданому околі нульового наближення y_0 мають місце нерівності*

$$\left\| \mathcal{J}_k^+ \right\| \leq \sigma_1(k), \quad \left\| d^2 \varphi_\rho(\xi_k; \tilde{y} - y_k) \right\| \leq \sigma_2(k) \cdot \|\tilde{y} - y_k\|. \quad (3.23)$$

3. *Існує константа*

$$\check{\theta} := \sup_{k \in N} \left\{ \frac{\sigma_1(k)\sigma_2(k)}{2} \right\}$$

Тоді за умов

$$P_{\mathcal{J}_k^*} = 0, \quad \mathcal{J}_k := \varphi'_\rho(y_k) \in \mathbb{R}^{m \times \rho} \quad (3.24)$$

та

$$\check{\theta} \cdot |\tilde{y} - y_0| < 1 \quad (3.25)$$

для знаходження розв'язку y^* рівняння (3.22) може бути використана ітераційна схема

$$y_{k+1} = y_k - \mathcal{J}_k^+ \varphi_\rho(y_k), \quad (3.26)$$

при цьому швидкість збіжності послідовності $\{y_k\}$ до розв'язку y^* рівняння (3.22) квадратична. За умови $B_\rho(t) := B(t)P_{A_\rho(t)}\Psi(t) \equiv B_\rho$, а також

$$f(t) \equiv f, \quad \Phi(t) \equiv \Phi, \quad F(z, z', t) \equiv F(z, z') - \text{const}$$

вектор y^* визначає положення рівноваги $z(t) = P_{A_\rho(t)}\Psi(t)y^*$ нелінійної інтегрально-диференціальної системи (2.1). Тут $P_{\mathcal{J}_k^*} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{N}(\mathcal{J}_k^*)$ — ортопроектор матриці $\mathcal{J}_k^* \in \mathbb{R}^{m \times \rho}$.

Відзначимо, що умова (3.24) рівнозначна до вимоги повноти матриці $\mathcal{J}_k$ і можлива лише у випадку $m \leq \rho$.

Приклад 3.3.2. Вимоги лема 3.3.2 задовольняє нелінійна інтегро-диференціальна система

$$A(t) z'(t) = B(t)z(t) + f(t) + \Phi(t) \int_0^1 F(z(s), z'(s), s) ds, \quad \Phi := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.27)$$

де

$$A(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) := \begin{pmatrix} \sin t & \cos t & \sin t \\ \cos t & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad f(t) := - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$F(z(t), z'(t)) := V(t) z(t) z^*(t) z(t), \quad V(t) := \begin{pmatrix} \sin t & \cos t & \sin t \\ \cos t & -\sin t & \cos t \\ \sin t & \cos t & \sin t \end{pmatrix}.$$

Для рівняння (3.27) не виконується умова

$$B(t) \equiv B - \text{const}, \quad Z(z, z', t) \equiv Z(z, z').$$

Для матриці

$$\Phi(t) := \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

вектор-функція

$$\varphi_\rho(y) = \begin{pmatrix} u(1 + u^2 + v^2) - 3 \\ v(1 + u^2 + v^2) - 3 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

визначена в довільній відкритій області $D \subset \mathbb{R}^2$ і двічі неперервно-диференційовна по

$$y := \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

в околі $\Omega \subseteq D$. Покладемо $y_0 := \begin{pmatrix} 0,98 & 1,01 \end{pmatrix}^*$, при цьому

$$\text{rank} [\varphi'_\rho(y_0)] = 2, \quad \|\varphi_\rho(z_1)\|_\infty \approx 0,000\,898\,028, \quad y_1 \approx \begin{pmatrix} 1,00\,018 \\ 0,999\,989 \end{pmatrix}.$$

Далі $\text{rank} [\varphi'_\rho(y_1)] = 2$, крім того

$$\left\| [\varphi'_\rho(y_1)]^+ \right\|_\infty := \sigma_1(1) \approx 0,333\,313, \quad \left\| d^2 \varphi_\rho(y_1) \right\|_\infty := \sigma_2(1) \approx 12,0014.$$

при цьому викопано умову (3.25): $\check{\theta}_1 \cdot \|y_1 - y_0\|_\infty \approx 0,0403702 \ll 1$, де

$$\check{\theta}_1 := \frac{\sigma_1(1)\sigma_2(1)}{2} \approx 2,00\,012.$$

Оскільки умова (3.25) для першого кроку ітераційної схеми (3.26) виконана, знаходимо

$$y_2 \approx \begin{pmatrix} 1,000\,000\,020\,361\,2347 \\ 0,999\,999\,997\,895\,1472 \end{pmatrix}.$$

Далі $\text{rank} [\varphi'_\rho(y_2)] = 2$, крім того

$$\left\| [\varphi'_\rho(y_2)]^+ \right\|_\infty := \sigma_1(2) \approx 0,333\,333, \quad \left\| d^2 \varphi_\rho(y_2) \right\|_\infty := \sigma_2(2) \approx 12,0000.$$

при цьому виконана умова (3.25)

$$\check{\theta}_2 \cdot \|z_2 - z_0\|_\infty \approx 0,04 \ll 1, \quad \check{\theta}_2 := \frac{\sigma_1(2)\sigma_2(2)}{2} \approx 2,00\,000.$$

Для другого кроку ітераційної схеми (3.26) нев'язка отриманого наближення $\|\varphi_\rho(z_2)\|_\infty \approx 9,75\,965 \times 10^{-8}$ достатньо велика, тому знаходимо

$$y_3 \approx \begin{pmatrix} 1,0000\,000\,000\,000\,002 \\ 0,999\,999\,999\,999\,9999 \end{pmatrix}.$$

Далі $\text{rank} [\varphi'_\rho(y_3)] = 2$, крім того

$$\left\| [\varphi'_\rho(y_3)]^+ \right\|_\infty := \sigma_1(3) \approx 0,333\,333, \quad \left\| d^2\varphi_\rho(y_3) \right\|_\infty := \sigma_2(3) \approx 12,0000.$$

при цьому виконана умова (3.25)

$$\check{\theta}_3 \cdot \|z_3 - z_0\|_\infty \approx 0,04 \ll 1, \quad \check{\theta}_3 := \frac{\sigma_1(3) \sigma_2(2)}{2} \approx 2,00\,000.$$

Для третього кроку ітераційної схеми (3.26) нев'язка отриманого наближення

$$\|\varphi_\rho(y_3)\|_\infty \approx 1,11\,022 \times 10^{-15},$$

тому природно обмежитися цим наближенням. Знайдений вектор y_3 визначає наближення до положення рівноваги нелінійної інтегрально-диференціальної системи (3.27). При цьому нелінійна інтегрально-диференціальна система (3.27) має точне положення рівноваги

$$z(t) = P_{A_\rho(t)} \Phi(t) y_3 \approx \begin{pmatrix} 0 \\ \sin t - \cos t \\ -\sin t - \cos t \end{pmatrix}.$$

яке визначає вектор

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

при цьому

$$\|y_1 - y\|_\infty \approx 0,000\,183\,891, \quad \|y_2 - y\|_\infty \approx 2,03\,612 \times 10^{-8},$$

$$\|y_3 - y\|_\infty \approx 2,22\,045 \times 10^{-16},$$

Досліджуємо далі задачу про побудову розв'язків

$$z(t) \in \mathbb{D}^2[a; b], \quad z'(t) \in \mathbb{L}^2[a; b]$$

нелінійної інтегро-диференціальної крайової задачі (3.16), не розв'язаної відносно похідної. Будемо називати положенням рівноваги нелінійної інтегро-диференціальної крайової задачі (3.16), не розв'язаної відносно похідної вектор-функцію $z(t) \in \mathbb{D}^2[a; b]$, $z'(t) \in \mathbb{L}^2[a; b]$ яка задовольняє трьом умовам:

$$\begin{aligned} A(t)z' &= 0, \quad B(t)z(t) + f(t) + \Phi(t) \int_a^b F(z(s), z'(s), s) ds = 0, \\ \ell z(\cdot) &= \alpha + Jz(\cdot). \end{aligned} \quad (3.28)$$

У найпростішому випадку, за умови

$$B(t) \equiv B, \quad f(t) \equiv f, \quad \Phi(t) \equiv \Phi, \quad F(z, z', t) \equiv F(z, z') - \text{const}$$

положення рівноваги $z(t) \equiv z - \text{const}$ нелінійної інтегро-диференціальної крайової задачі (3.16) будемо називати стаціонарними. Позначимо вектор-функцію

$$\varphi(z) := \begin{pmatrix} Bz + f + (b-a)\Phi F(z, z') \\ \ell z(\cdot) - \alpha - Jz(\cdot) \end{pmatrix} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m+p}.$$

Задача про побудову положення рівноваги

$$z(t) \in \mathbb{D}^2[a; b], \quad z'(t) \in \mathbb{L}^2[a; b]$$

нелінійної інтегро-диференціальної крайової задачі (3.16), не розв'язаної відносно похідної приводить до задачі про знаходження констант $z(t) \equiv z^*$, які є коренями рівняння

$$\varphi(z) = 0. \quad (3.29)$$

Для знаходження розв'язку рівняння (3.29) може бути використаний узагальнений метод Ньютона [131].

Теорема 3.3.1. *Припустимо, що для рівняння (3.29) виконані наступні умови*

1. *Нелінійна вектор-функція $\varphi(z) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m+p}$, двічі неперервно-диференційовна в околі точки z_0 , має корінь $z^* \in \mathbb{R}^n$.*

2. У заданому околі нульового наближення z_0 мають місце нерівності

$$\left\| J_k^+ \right\| \leq \sigma_1(k), \left\| d^2\varphi(\xi_k; z^* - z_k) \right\| \leq \sigma_2(k) \cdot \|z^* - z_k\|. \quad (3.30)$$

3. Існує константа

$$\theta := \sup_{k \in N} \left\{ \frac{\sigma_1(k)\sigma_2(k)}{2} \right\}$$

Тоді за умов

$$P_{J_k^*} = 0, \quad J_k := \varphi'(z_k) \in \mathbb{R}^{(m+p) \times n} \quad (3.31)$$

та (1.13) для знаходження розв'язку z^* рівняння (3.29) може бути використана ітераційна схема

$$z_{k+1} = z_k - J_k^+ \varphi(z_k), \quad (3.32)$$

при цьому швидкість збіжності послідовності $\{z_k\}$ до розв'язку z^* рівняння (3.29) квадратична. Вектор-функція z^* за умови

$$B(t) \equiv B, \quad f(t) \equiv f, \quad \Phi(t) \equiv \Phi - \text{const}, \quad F(z, z', t) \equiv F(z, z')$$

є положенням рівноваги нелінійної інтегро-диференціальної крайової задачі (2.1), не розв'язаної відносно похідної. Тут

$$P_{J_k^*} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{N}(J_k^*)$$

— ортопроектор матриці $J_k^* \in \mathbb{R}^{n \times (m+p)}$.

У частковому випадку $n = m + p$ для розв'язання рівняння (3.29) може бути використаний традиційний метод Ньютона-Канторовича [88, с. 680, 682]. Позначимо вектор-функцію $\varphi(z) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, визначену у відкритій області D . Досліджуємо задачу про знаходження розв'язку $z \in D \subset \mathbb{R}^n$ нелінійного рівняння

$$\varphi(z) = 0. \quad (3.33)$$

Функцію $f(z)$ вважаємо двічі неперервно-диференційовною по z в області D . Для побудови послідовності $\{z_k\}$, збіжної до розв'язку $\tilde{z} \in \mathbb{R}^n$ скористаємось методом Ньютона [88]. Нехай знайдено наближення $z_k(\varepsilon)$, достатньо

близьке до точного розв'язку $\tilde{z}$ рівняння (3.33). Для знаходження наступного наближення z_{k+1} до точного розв'язку покладемо

$$z_{k+1} = z_k - [\varphi'(z_k)]^{-1} \varphi(z_k). \quad (3.34)$$

Припустимо, що в околі $\Omega \subseteq D \subset \mathbb{R}^n$ точного розв'язку $\tilde{z} \in \Omega$ мають місце нерівності

$$\left\| [\varphi'(z_0)]^{-1} \right\| \leq \gamma_1, \quad \left\| \varphi(z_0) \right\| \leq \gamma_2, \quad \left\| \varphi''(z_k) \right\| \leq \gamma_3(k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Умови збіжності ітераційної схеми (3.34) визначає наступне твердження [88, с. 680, 682].

Наслідок 3.3.1. *Припустимо, що вектор-функція $\varphi(z) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ визначена у відкритій області $D \subset \mathbb{R}^n$ і двічі неперервно-диференційовна по z в околі $\Omega \subseteq D \subset \mathbb{R}^n$. Припустимо також, що $\det [\varphi'(z_0)] \neq 0$ та існує константа*

$$\theta = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ 2 \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3(k) \right\} < 1.$$

Тоді рівняння (3.33) має єдиний розв'язок $z^ \in \Omega$, до якого збігається ітераційна схема (3.34). Припустимо, що вектор-функція $\varphi(z)$, двічі неперервно-диференційовна в околі точки z_0 , має корінь $z^* \in \mathbb{R}^n$. Припустимо, також що в малому околі точки z_0 мають місце нерівності*

$$\left\| [\varphi'(z_0)]^{-1} \right\| \leq \gamma_1, \quad \left\| \varphi(z_0) \right\| \leq \gamma_2, \quad \left\| \varphi''(z_k) \right\| \leq \gamma_3(k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

та існує константа

$$\theta = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ 2 \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3(k) \right\} < 1.$$

Тоді рівняння (3.29) у малому околі точки z_0 має єдиний розв'язок, до якого збігається ітераційна схема

$$z_{k+1} = z_k - J_k^{-1} \varphi(z_k). \quad (3.35)$$

Приклад 3.3.3. Вимоги наслідку 3.3.1 задовольняє нелінійна інтегрально-диференціальна крайова задача

$$A(t) z'(t) = B(t)z(t) + f(t) + \Phi(t) \int_0^1 F(z(s), z'(s), s) ds, \quad \ell z(\cdot) = Jz(\cdot), \quad (3.36)$$

де

$$A(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Phi := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad z(t) := \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}, \quad F(z, z') := \begin{pmatrix} \sin v(t) + \cos w(t) \\ \sin w(t) + \cos u(t) \end{pmatrix},$$

крім того

$$\ell z(\cdot) := w(0), \quad Jz(\cdot) := -\sin u(0) - \cos v(1).$$

Вектор-функція

$$\varphi(z) = \begin{pmatrix} v + \sin w + \cos u \\ u + \sin v + \cos w \\ w + \sin u + \cos v \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

визначає стаціонарні положення рівноваги $z(t) \equiv z - \text{const}$ нелінійної інтегро-диференціальної крайової задачі (3.36). Вектор-функція $\varphi(z)$ визначена в довільній відкритій області $D \subset \mathbb{R}^3$ і двічі неперервно-диференційовна по y в околі $\Omega \subseteq D$. Покладемо

$$z_0 := - \begin{pmatrix} 0,456 & 0,456 & 0,456 \end{pmatrix},$$

при цьому $\det [\varphi'(z_0)] \approx -0,623\,017 \neq 0$, крім того

$$\left\| [\varphi'(z_0)]^{-1} \right\|_{\infty} \leq \gamma_1 \approx 2,68\,734, \quad \left\| \varphi(z_0) \right\|_{\infty} \leq \gamma_2 \approx 0,00146\,076.$$

Перший диференціал Фреше даної вектор-функції

$$d\varphi(z, dz) := \varphi'(z) dz = \begin{pmatrix} dv - \sin u \, du + \cos w \, dw \\ du + \cos v \, dv - \sin w \, dw \\ \cos u \, du - \sin v \, dv + dw \end{pmatrix}$$

визначає матриця Якобі

$$J(z) = \begin{pmatrix} -\sin u & 1 & \cos w \\ 1 & \cos v & -\sin w \\ \cos u & -\sin v & 1 \end{pmatrix}.$$

Диференціал Фреше другого порядку даної вектор-функції

$$d^2\varphi(z, dz) = - \begin{pmatrix} \sin w dw^2 + \cos u du^2 \\ \sin v dv^2 + \cos w dw^2 \\ \sin u du^2 + \cos v dv^2 \end{pmatrix}$$

має норму $\|d^2\varphi(z, dz)\|_\infty \leq \gamma_3 := 2$, тому $\theta \approx 0,0157\,023 < 1$. Отже, нелінійна інтегро-диференціальна крайова задача (3.36) у малому околі точки z_0 має єдине стаціонарне положення рівноваги, до якого збігається ітераційна схема (3.35), при цьому

$$z_1 \approx \begin{pmatrix} -0,456\,624\,742\,720\,777 \\ -0,456\,624\,742\,720\,777 \\ -0,456\,624\,742\,720\,777 \end{pmatrix}, \quad z_2 \approx \begin{pmatrix} -0,456\,624\,704\,569 \\ -0,456\,624\,704\,569 \\ -0,456\,624\,704\,569 \end{pmatrix},$$

$$z_3 \approx \begin{pmatrix} -0,456\,624\,704\,567\,6308 \\ -0,456\,624\,704\,567\,6308 \\ -0,456\,624\,704\,567\,6308 \end{pmatrix}.$$

Для оцінки точності знайдених наближень z_k до розв'язку нелінійної інтегро-диференціальної крайової задачі (3.36) визначимо нев'язки

$$\Delta_k := \left\| \varphi(z_k) \right\|_\infty, \quad k = 1, 2, 3.$$

Зокрема

$$\Delta_1 \approx 8,921\,990 \times 10^{-8}, \quad \Delta_2 \approx 3,33\,067 \times 10^{-16}, \quad \Delta_3 \approx 1,11\,022 \times 10^{-16}.$$

3.4. Нелінійні інтегро-диференціальні крайові задачі з відхиленням аргументу, не розв'язані відносно похідної

Дослідження диференціально-алгебраїчних рівнянь започатковане у роботах К. Вейерштрасса, М.М. Лузіна та Ф.Р. Гантмахера. Роботи S. Campbell, Ю.Є. Бояринцева, В.Ф. Чистякова, А.М.Самойленка, М.О.Перестюка, В.П. Яковця, О.А. Бойчука, А. Pichmann та T. Reis присвячені систематичному дослідженню диференціально-алгебраїчних крайових задач. У той же час дослідження диференціально-алгебраїчних крайових задач тісно по'язані з вивченням лінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь, започаткованих у роботах А. Пуанкаре, О.М. Ляпунова, М.М. Крилова, М.М. Боголюбова, І.Г. Малкіна, А.Д. Мишкіса, Е.О. Гребенікова, Ю.О. Рябова, Ю.О. Митропольського, І.Т. Кігурадзе, А.М.Самойленка, М.О. Перестюка, та О.А.Бойчука. Дослідження диференціально-алгебраїчних крайових задач тісно по'язані з вивченням лінійних крайових задач для функціонально-диференціальних рівнянь [7, 8, 9, 10, 12, 19, 20, 21, 22, 36, 77, 81, 86, 90, 116, 137].

Досліджуємо задачу про побудову розв'язків [36]

$$y(t) \in \mathbb{C}[0, T], \quad y(t) \in \mathbb{D}^2[0; T], \quad y'(t) \in \mathbb{L}^2[\Delta; T]$$

нелінійної інтегро-диференціальної системи з відхиленням аргументу, не розв'язаної відносно похідної

$$\begin{aligned} A(t)y'(t) = & B(t)y(t) + C(t)y(h(t)) + \\ & + \Phi(t) \int_{\Delta}^T F(y(s), y(h(s)), y'(s), s) ds + f(t), \end{aligned} \quad (3.37)$$

підпорядкованих крайовій умові

$$\ell y(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^v. \quad (3.38)$$

Розв'язок крайової задачі (3.37), (3.38) шукатимемо неперервним у точці $t = \Delta$ з початковою функцією [6, 36] $y(t) = \varphi(t) \in \mathbb{C}^1[0, \Delta]$. Відхилення

аргументу визначає неперервна функція

$$h(t) : [\Delta, T] \rightarrow [0, \Delta];$$

тут

$$A(t), B(t), C(t) \in \mathbb{C}_{m \times n}[0, T], \Phi(t) \in \mathbb{C}_{m \times q}[0, T], f(t) \in \mathbb{C}[0, T]$$

— неперервні матриці; матрицю $A(t)$ припускаємо прямокутною: $m \neq n$, або ж квадратною, але виродженою. Крім того, припускаємо, що ранг матриці $A(t)$ при похідній не змінюється на відрізку $[\Delta, T]$. Нелінійну вектор-функцію $F(y(t), y(h(t)), y'(t), t)$ припускаємо двічі неперервно-диференційовною за розв'язком $y(t)$ крайової задачі (3.37), (3.38) та його похідною $y'(t)$ у малому околі розв'язку

$$y_0(t) \in \mathbb{C}[0, T], y_0(t) \in \mathbb{D}^2[0; T], y'_0(t) \in \mathbb{L}^2[\Delta; T], T := (q + 1) \Delta, q \in \mathbb{N}$$

породжуючої нетерової $n \neq p$ крайової задачі

$$A(t)y'_0(t) = B(t)y_0(t) + C(t)y(h(t)) + f(t), \ell y_0(\cdot) = \alpha \quad (3.39)$$

та його похідної $y'_0(t)$, а також неперервною за третім аргументом на відрізку $[\Delta; T]$; $\ell y(\cdot) : \mathbb{C}[0; T] \rightarrow \mathbb{R}^v$ — лінійний обмежений векторний функціонал, визначений на просторі $\mathbb{C}[0; T]$ n -вимірних неперервних на відрізку $[0, T]$ вектор-функцій [36]. Таким чином поставлена задача узагальнює крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма з виродженим ядром, а також крайові задачі для систем диференціально-алгебраїчних рівнянь [40, 57]. Розв'язок породжуючої системи (3.39) визначає рівняння

$$A(t)y'_0(t) = B(t)y_0(t) + g(t), g(t) := C(t)\varphi(h(t)) + f(t), t \in [\Delta; T]. \quad (3.40)$$

Припустимо, що для породжуючої системи (3.40) виконуються вимоги теореми, доведеної у статті [57, с. 15]. За цих умов у випадку виродження порядку p для довільної фіксованої неперервної вектор-функції $\nu_p(t)$ диференціально-алгебраїчна система (3.40) має розв'язок вигляду

$$y_0(t, c_{\rho_{p-1}}) = X_p(t)c_{\rho_{p-1}} + K \left[g(s), \nu_p(s) \right] (t), t \in [\Delta; T], c_{\rho_{p-1}} \in \mathbb{R}^{\rho_{p-1}}.$$

Тут $K[g(s), \nu_p(s)](t)$ — узагальнений оператор Гріна задачі Коші для породжуючої системи (3.40). Розв’язок породжуючої системи (3.40)

$$y_0(t) := K_\Delta \left[f(s), \varphi(s), \nu_p(s) \right] (t), \quad t \in [\Delta; T]$$

неперервно та однозначно продовжує початкову функцію за умови

$$P_{X_p^*}(\Delta) \left\{ \varphi(\Delta) - K \left[g(s), \nu_p(s) \right] (\Delta) \right\} = 0; \quad (3.41)$$

тут $P_{X_p^*}(\Delta)$ — матриця-ортопроектор,

$$\begin{aligned} K_\Delta \left[f(s), \varphi(s), \nu_p(s) \right] (t) := & X_p(t) X_p^+(\Delta) \left\{ \varphi(\Delta) - \right. \\ & \left. - K \left[g(s), \nu_p(s) \right] (\Delta) \right\} + K \left[g(s), \nu_p(s) \right] (t), \quad t \in [\Delta; T]. \end{aligned}$$

Як відомо, загальний вигляд

$$\ell y(\cdot) := \int_0^T dW(t) y(t), \quad W(t) \in \mathbb{V}_{m \times n}[0, T]$$

лінійного функціоналу

$$\ell y(\cdot) := \int_0^T dW(t) y(t) : \mathbb{C}[0, T] \rightarrow \mathbb{R}^v$$

визначає $W(t)$ — $(v \times n)$ — вимірна матриця, елементи якої — функції обмеженої на відрізку $[0, T]$ варіації; інтеграл тут — інтеграл Рімана — Стільтєса [36], отже, лінійний обмежений векторний функціонал $\ell y(\cdot)$ зображується у вигляді

$$\ell y(\cdot) = \ell_0 y(\cdot) + \ell_1 y(\cdot) : \mathbb{C}[0; T] \rightarrow \mathbb{R}^v;$$

тут

$$\begin{aligned} \ell_0 y(\cdot) &:= \int_0^\Delta dW(t) y(t) : \mathbb{C}[0; \Delta] \rightarrow \mathbb{R}^v, \\ \ell_1 y(\cdot) &:= \int_\Delta^T dW(t) y(t) : \mathbb{C}[\Delta; T] \rightarrow \mathbb{R}^v \end{aligned}$$

— лінійні обмежені векторні функціонали. Припустимо, що для породжуючої крайової задачі (3.40) з прямокутною, або ж квадратною, але виродженою матрицею $A(t)$ сталого рангу, виконуються вимоги теореми у статті [57, с. 15]. Породжуюча крайова задача (3.39) розв’язна тоді і лише тоді, коли

$$\ell_0 \varphi(\cdot) + \ell_1 K_\Delta \left[f(s), \varphi(s), \nu_p(s) \right] (\cdot) = \alpha,$$

при цьому породжуюча крайова задача (3.39) має єдиний розв’язок

$$y_0(t) = G[f(s), \varphi(s); \alpha](t), \quad t \in [\Delta; T],$$

який неперервно та однозначно продовжує початкову функцію і зображується за допомогою узагальненого оператора Гріна [57]

$$G[f(s), \varphi(s); \alpha](t) := K_\Delta \left[f(s), \varphi(s), \nu_p(s) \right] (t), \quad t \in [\Delta; T].$$

Таким чином, доведено наступне твердження [28].

Лема 3.4.1. *У випадку виродження порядку p для довільної фіксованої неперервної вектор-функції $\nu_p(t)$ диференціально-алгебраїчна система (3.39) розв’язна тоді і лише тоді, коли*

$$\ell_0 \varphi(\cdot) + \ell_1 K_\Delta \left[f(s), \varphi(s), \nu_p(s) \right] (\cdot) = \alpha. \quad (3.42)$$

У випадку (3.41), (3.42) породжуюча крайова задача (3.39) має єдиний розв’язок

$$y_0(t) = G[f(s), \varphi(s); \alpha](t), \quad t \in [\Delta; T],$$

який неперервно та однозначно продовжує початкову функцію.

Для фіксованої неперервної функції $\nu_p(t)$ розв’язок нелінійної крайової задачі (3.37), (3.38) шукаємо у вигляді $y(t) = y_0(t) + x(t)$. Тут P_{Q^*} — матриця-ортопроектор:

$$\mathbb{R}^v \rightarrow \mathbb{N}(Q^*), \quad Q := \ell_1 X_p(\cdot) \in \mathbb{R}^{v \times \rho_{p-1}}.$$

Для знаходження відхилення

$$x(t) \in \mathbb{C}[0, T], \quad x(t) \in \mathbb{D}^2[0; T], \quad x'(t) \in \mathbb{L}^2[\Delta; T]$$

від породжуючого розв'язку $y_0(t)$ отримуємо крайову задачу

$$A(t)x'(t) = B(t)x(t) + \Phi(t) \int_{\Delta}^T F(y(s), y(h(s)), y'(s), s) ds, \quad \ell y(\cdot) = 0. \quad (3.43)$$

Відхилення

$$x(t, u, v) = X_p(t)u + \Psi(t)v$$

від породжуючого розв'язку $y_0(t)$ визначають невідомі сталі

$$v := \int_{\Delta}^T F(y(s), y(h(s)), y'(s), s) ds \in \mathbb{R}^q, \quad u \in \mathbb{R}^n$$

та матриця

$$\Psi(t) := K_{\Delta} \left[f(s), \varphi(s), \nu_p(s) \right] (t) \in \mathbb{D}_{n \times q}^2[\Delta; T].$$

Шуканий розв'язок $y(t)$ виродженої інтегро-диференціальної системи (3.37) задовольняє крайову умову (3.38) у випадку

$$Qv + Ru = 0, \quad R := \ell \Psi(\cdot) \in \mathbb{R}^{v \times q}. \quad (3.44)$$

Позначимо $P_0 \in \mathbb{R}^{\rho_{p-1} \times \omega_0}$ матрицю, утворену з ω_0 лінійно-незалежних стовпців ортопроектора P_Q та $P_1 \in \mathbb{R}^{q \times \omega_1}$ матрицю, утворену з ω_1 лінійно-незалежних стовпців ортопроектора $P_R : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{N}(R)$. Умову (3.38) задовольняють вектори

$$u(c_0) = P_0 c_0, \quad v(c_1) = P_1 c_1, \quad c_0 \in \mathbb{R}^{\omega_0}, \quad c_1 \in \mathbb{R}^{\omega_1}, \quad \check{c} := \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\omega_0 + \omega_1}.$$

Для визначення невідомих $u(c_0)$ та $v(c_1)$ отримуємо рівняння

$$\psi(\check{c}) = 0; \quad (3.45)$$

тут

$$\psi(\check{c}) := v(c_1) - \int_{\Delta}^T F(y(s, \check{c}), y(h(s), \check{c}), y'(s, \check{c}), s) dt$$

— нелінійна вектор-функція: $\psi(\check{c}) : \mathbb{R}^{\omega_0 + \omega_1} \rightarrow \mathbb{R}^{\rho_{p-1}}$. Якщо для отриманого рівняння (3.45) справджуються умови [88, 141], знаходимо невідомі величини $u(c_0)$ та $v(c_1)$. Таким чином, доведена наступна теорема [28].

Теорема 3.4.1. Припустимо, що для породжуючої крайової задачі (3.40) виконуються вимоги леми 3.4.1. За цих умов для довільної фіксованої неперервної вектор-функції $\nu_p(t)$ породжуюча крайова задача (3.39) має єдиний розв'язок

$$y_0(t) = G[f(s), \varphi(s); \alpha](t), \quad t \in [\Delta; T],$$

який неперервно та однозначно продовжує початкову функцію. Шуканий розв'язок

$$y(t) = y_0(t) + x(t), \quad x(t) = X(t)v + \Psi(t)u, \quad u(c_0) = P_0 c_0, \quad v(c_1) = P_1 c_1$$

інтегро-диференціальної крайової задачі (3.37), (3.38), не розв'язаної відносно похідної, визначає вектор $\check{c}$, який задовольняє нелінійне рівняння (3.45). Припустимо, що для рівняння (3.45) виконуються наступні умови

1. Нелінійна вектор-функція $\psi(\check{c})$, двічі неперервно диференційовна по $\check{c}$ в області $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{\omega_0 + \omega_1}$, в околі точки $\check{c}_0$ має корінь $\check{c}$.
2. В околі нульового наближення $\check{c}_0 \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^{\omega_0 + \omega_1}$ мають місце нерівності

$$\|J_k^+\| \leq \sigma_1(k), \quad \|d^2\psi(\xi_k; \check{c} - \check{c}_k)\| \leq \sigma_2(k) \cdot \|\check{c} - \check{c}_k\|.$$

3. Існує константа

$$\theta := \sup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{\sigma_1(k)\sigma_2(k)}{2} \right\}.$$

Тоді за умови

$$P_{J_k^*} = 0, \quad J_k := \psi'(\check{c}_k) \in \mathbb{R}^{\rho_{p-1} \times (\omega_0 + \omega_1)},$$

для знаходження вектора $\check{c}$ застосовна ітераційна схема

$$\check{c}_{k+1} = \check{c}_k - J_k^+ \varphi(\check{c}_k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (3.46)$$

при цьому швидкість збіжності послідовності наближень до розв'язку рівняння (3.45) квадратична. За умови $x(\Delta) = 0$ знайдений розв'язок інтегро-диференціальної крайової задачі (3.37), (3.38), не розв'язаної відносно похідної, неперервно та однозначно продовжує початкову функцію.

Теорема 3.4.1 узагальнює результати [34] на випадок диференціально-алгебраїчної головної частини системи інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма з виродженням ядром. Крім того, доведена теорема узагальнює результати [34] на випадок нелінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі.

Приклад 3.4.1. Умови теореми 3.4.1 справджуються у випадку періодичної крайової задачі для рівняння

$$A(t)y'(t) = B(t)y(t) + C(t)y(h(t)) + \quad (3.47)$$

$$+ \Phi(t) \int_{\pi}^{2\pi} F(y(s), y(h(s)), y'(s), s) ds + f(t),$$

де зокрема

$$A(t) := \begin{pmatrix} \cos t & 0 & \sin t \\ -\sin t & 0 & \cos t \\ \cos t & \cos t & \sin t \\ -\sin t & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad B(t) := \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t & -\sin t \\ -\cos t & -\sin t & -\cos t \\ -\sin t & \cos t & -\sin t \\ -\cos t & -\sin t & -\cos t \end{pmatrix},$$

$$C(t) := \begin{pmatrix} 0 & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & -\cos t \\ 0 & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & -\cos t \end{pmatrix}, \quad f(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - \sin t \cos t \\ 0 \\ 1 - \sin t \cos t \end{pmatrix},$$

крім того,

$$\Phi(t) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M(t) := \begin{pmatrix} 0 & 2 \sin t & 0 \\ 3 \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \sin t \end{pmatrix},$$

Відхилення аргументу визначає неперервна функція

$$h(t) := t - \pi : [\pi, 2\pi] \rightarrow [0, \pi]. \quad F(y(t), y'(t), t) := M(t) y(t) (y'(t))^* y(t).$$

Розв'язок періодичної крайової задачі для рівняння (3.47) шукатимемо неперервним у точці $t = \pi$ з початковою функцією

$$y(t) = \varphi(t) := \begin{pmatrix} \cos t & 0 & 0 \end{pmatrix}^* \in \mathbb{C}^1[0, \pi].$$

Оскільки

$$P_{A^*(t)} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 - \cos 2t & \sin 2t & \cos 2t - 1 & -\sin 2t \\ \sin 2t & 1 + \cos 2t & -\sin 2t & -1 - \cos 2t \\ \cos 2t - 1 & -\sin 2t & 1 - \cos 2t & \sin 2t \\ -\sin 2t & -1 - \cos 2t & \sin 2t & 1 + \cos 2t \end{pmatrix} \neq 0,$$

породжуюча система для рівняння (3.47) вироджена, але матриця $A(t)$ — сталого рангу. Для породжуючої системи для рівняння (3.47) виконуються вимоги теореми у статті [57, с. 15], причому має місце виродження першого порядку: $p = 1$. Породжуюча система (3.40) для рівняння (3.47) має розв'язок

$$y(t, c_3) = X_1(t) c_3 + K \left[g(s) \right] (t), \quad t \in [\pi; 2\pi], \quad c_3 \in \mathbb{R}^3,$$

незалежний від вектор-функції $\nu_1(t)$; тут

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 \\ e^{-t} - 1 & e^{-t} & 1 - e^{-t} - t \end{pmatrix},$$

а також

$$K \left[g(s) \right] (t) = \begin{pmatrix} \cos t - 1 \\ 0 \\ 1 - e^{-t} \end{pmatrix}$$

— узагальнений оператор Гріна задачі Коші для породжуючої диференціально-алгебраїчної системи у разі рівняння (3.47). Умови (3.41) та (3.42) при цьому виконано, тому породжуюча крайова задача для рівняння (3.47) має єдиний розв'язок

$$y_0(t) = G[f(s), \varphi(s); \alpha](t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [\pi; 2\pi],$$

який неперервно та однозначно продовжує початкову функцію. Оскільки

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2\pi \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 - e^{-2\pi} & 1 - e^{-2\pi} & e^{-2\pi} - 1 + 2\pi \end{pmatrix}, \quad R = (e^{-2\pi} - 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

отримуємо матриці

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Періодичний розв'язок рівняння (3.47)

$$y(t) = y_0(t, c_r) + x(t), \quad x(t) = X(t)v + \Psi(t)u, \quad u(c_0) = P_0 c_0, \quad v(c_1) = P_1 c_1,$$

не розв'язаного відносно похідної, визначає вектор $\check{c}$, який задовольняє не-лінійне рівняння

$$\psi(\check{c}) := \begin{pmatrix} 2c_2 - c_3 \\ -4c_1 - c_2 + 2c_3 \\ -c_2 - c_3 - \pi c_1^2 \end{pmatrix} = 0.$$

Для отриманого рівняння справджуються умови [88, 141], тому для знаходження константи $\check{c}$ застосовна ітераційна схема (3.46), дійсно: за умови

$$\check{c}_0 := - \left(1, 27 \quad 1, 7 \quad 3, 4 \right)^*, \quad \|\varphi(\check{c}_0)\|_\infty \approx 0, 02,$$

на першому кроці отримуємо $P_{J_0^*} = 0$, при цьому

$$\check{c}_1 \approx \begin{pmatrix} -1, 27 \quad 325 \\ -1, 69 \quad 766 \\ -3, 39 \quad 533 \end{pmatrix}, \quad \|\psi(\check{c}_1)\|_\infty \approx 0, 0000 \quad 331 \quad 388.$$

На другому кроці отримуємо $P_{J_1^*} = 0$, при цьому

$$\check{c}_2 \approx \begin{pmatrix} -1, 273 \quad 239 \quad 544 \quad 789 \quad 068 \\ -1, 697 \quad 652 \quad 726 \quad 385 \quad 424 \\ -3, 395 \quad 305 \quad 452 \quad 770 \quad 848 \end{pmatrix}, \quad \|\psi(\check{c}_2)\|_\infty \approx 2, 15 \quad 622 \times 10^{-10}.$$

На третьому кроці отримуємо $P_{J_2^*} = 0$, при цьому

$$\check{c}_3 \approx \begin{pmatrix} -1, 273 \quad 239 \quad 544 \quad 735 \quad 162 \\ -1, 697 \quad 652 \quad 726 \quad 313 \quad 550 \\ -3, 395 \quad 305 \quad 452 \quad 627 \quad 100 \end{pmatrix}, \quad \|\psi(\check{c}_3)\|_\infty \approx 8, 88 \quad 178 \times 10^{-16}.$$

Оскільки умову $x(\Delta) = 0$ не виконано, періодичний розв'язок рівняння (3.47) однозначно продовжує початкову функцію з розривом у точці π . В той же час, для отриманого рівняння (3.45) у разі рівняння (3.47) існує триціальний розв'язок $\check{c} = 0$, при цьому періодична крайова задача для рівняння (3.47) має єдиний розв'язок

$$y(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [\pi; 2\pi],$$

який неперервно продовжує початкову функцію.

Припустимо далі вектор-функцію $F(y(t), y(h(t)), y'(t), t)$ лінійною за розв'язком $y(t), y(h(t))$ крайової задачі (3.37), (3.38) та його похідною $y'(t)$, тому має місце розклад

$$\begin{aligned} F(y_0(t) + x(t), y(h(t)) + x(h(t)), y'_0(t) + x'(t), t) &= F(y_0(t), y_0(h(t)), y'_0(t), t) + \\ &+ \mathcal{A}_1(t)x(t) + \mathcal{A}_2(t)x(h(t)) + \mathcal{A}_3(t)x'(t); \end{aligned}$$

тут

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1(t) &:= \\ &= \frac{\partial F(y_0(t) + x(t), y(h(t)) + x(h(t)), y'_0(t) + x'(t), t)}{\partial x(t)} \left| \begin{array}{l} y(t) = y_0(t), \\ y(h(t)) = y_0(h(t)), \\ y'(t) = y'_0(t), \end{array} \right. \\ \mathcal{A}_2(t) &:= \\ &= \frac{\partial F(y_0(t) + x(t), y(h(t)) + x(h(t)), y'_0(t) + x'(t), t)}{\partial x(h(t))} \left| \begin{array}{l} y(t) = y_0(t), \\ y(h(t)) = y_0(h(t)), \\ y'(t) = y'_0(t), \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\mathcal{A}_3(t) := \left. \begin{aligned} &= \frac{\partial F(y_0(t) + x(t), y(h(t)) + x(h(t)), y'_0(t) + x'(t), t)}{\partial x'(t)} \end{aligned} \right| \begin{aligned} y(t) &= y_0(t), \\ y(h(t)) &= y_0(h(t)), \\ y'(t) &= y'_0(t) \end{aligned}$$

— неперервні $(q \times n)$ -вимірні матриці. Позначимо $(q \times (\omega_0 + \omega_1))$ -вимірну матрицю

$$\mathcal{Q} := - \left\{ \int_{\Delta}^T [\mathcal{A}_1(t)X_p(t) + \mathcal{A}_2(t)X_p(h(t)) + \mathcal{A}_3(t)X'_p(t)]P_0 dt; \right. \\ \left. \int_{\Delta}^T [\mathcal{A}_1(t)\Psi(t) + \mathcal{A}_2(t)\Psi(h(t)) + \mathcal{A}_3(t)\Psi'(t)]P_1 dt - P_1 \right\}$$

та вектор

$$b := \int_{\Delta}^T F(y_0(t), y_0(h(t)), y'_0(t), t) dt \in \mathbb{R}^q.$$

Для знаходження вектора $\check{c}$ для фіксованої функції $\nu_p(t) \in \mathbb{L}^2[a; b]$ отримуємо рівняння

$$\mathcal{Q}\check{c} = b,$$

у випадку $P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$ розв'язне за умови

$$P_{\mathcal{Q}^*} b = 0 \tag{3.48}$$

у вигляді

$$\check{c} = \mathcal{Q}^+ b + P_{\mathcal{Q}^{\rho}} c_{\rho}, \quad c_{\rho} \in \mathbb{R}^{\rho};$$

тут

$$P_{\mathcal{Q}} : \mathbb{R}^{(\omega_0 + \omega_1)} \rightarrow \mathbb{N}(\mathcal{Q})$$

— ортопроектор матриці $\mathcal{Q}$; матриця $P_{\mathcal{Q}^{\rho}} \in \mathbb{R}^{n \times \rho}$ утворена з ρ лінійно-незалежних стовпців матриці-ортопроектора $P_{\mathcal{Q}}$. Позначимо матриці

$$\mathcal{P}_0 := \begin{pmatrix} I_{\omega_0} & O \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\omega_0 \times (\omega_0 + \omega_1)}, \quad \mathcal{P}_1 := \begin{pmatrix} O & I_{\omega_1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\omega_1 \times (\omega_0 + \omega_1)}.$$

Таким чином побудований розв'язок

$$y(t) \in \mathbb{D}^2[\Delta; T], \quad y'(t) \in \mathbb{L}^2[\Delta; T]$$

крайової задачі (3.37), (3.38)

$$y(t, c_\rho) = y_0(t) + W(t)c_\rho + V(t), \quad t \in [\Delta; T], \quad c_\rho \in \mathbb{R}^\rho;$$

тут

$$W(t) := U(t)P_{\mathcal{Q}_\rho}, \quad V(t) := U(t)\mathcal{Q}^+b, \quad U(t) := X_p(t)P_0\mathcal{P}_0 + \Psi(t)P_1\mathcal{P}_1.$$

Знайдений розв'язок крайової задачі (3.37), (3.38) неперервно продовжує початкову функцію за умови

$$P_{W^*(\Delta)}V(\Delta) = 0; \tag{3.49}$$

тут $P_{W^*(\Delta)}$ — матриця-ортопроектор:

$$P_{W^*(\Delta)} : \mathbb{R}^\rho \rightarrow \mathbb{N}(W^*(\Delta)).$$

Таким чином побудований шуканий розв'язок крайової задачі (3.37), (3.38), який неперервно продовжує початкову функцію

$$y(t, c_r) = W(t)P_{W(\Delta)_r}c_r - W(t)W^+(\Delta)V(\Delta) + V(t), \quad t \in [\Delta; T], \quad c_r \in \mathbb{R}^r;$$

тут $P_{W(\Delta)}$ — матриця-ортопроектор:

$$P_{W(\Delta)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{N}(W(\Delta)).$$

Матриця $P_{W(\Delta)_r} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ утворена з r лінійно-незалежних стовпців матриці-ортопроектора $P_{W(\Delta)}$. Позначимо матрицю $W_r(t) := W(t)P_{W(\Delta)_r}$. Таким чином, доведено наступне твердження [28].

Наслідок 3.4.1. *Припустимо, що для породжуючої крайової задачі (3.40) виконуються вимоги наведеної вище лемми. За цих умов для довільної фіксованої неперервної вектор-функції $\nu_p(t)$ породжуюча крайова задача (3.39) має єдиний розв'язок*

$$y_0(t) = G[f(s), \varphi(s); \alpha](t), \quad t \in [\Delta; T],$$

який неперервно та однозначно продовжує початкову функцію. При цьому, за умов (3.48), (3.49) для довільної фіксованої неперервної вектор-функції $\nu_p(t)$ крайова задача (3.37), (3.38) має розв'язок

$$y(t, c_r) = W_r(t)c_r + G[\Phi(s), \varphi(s); \alpha](t), \quad t \in [\Delta; T], \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

який неперервно продовжує початкову функцію і зображується за допомогою узагальненого оператора Гріна крайової задачі (3.37), (3.38)

$$G[\Phi(s), \varphi(s); \alpha](t) := V(t) - W(t)W^+(\Delta)V(\Delta), \quad t \in [\Delta; T].$$

Доведений наслідок узагальнює результати [34] на випадок диференціально-алгебраїчної головної частини системи інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма з виродженим ядром. Крім того, доведена теорема узагальнює результати [34] на випадок диференціально-алгебраїчної крайової задачі, яка містить інтегральну неоднорідність.

Приклад 3.4.2. Умови наслідку 3.4.1 справджуються у випадку періодичної крайової задачі для рівняння

$$\begin{aligned} A(t)y'(t) = B(t)y(t) + C(t)y(h(t)) + \\ + \Phi(t) \int_{\pi}^{2\pi} F(y(s), y(h(s)), y'(s), s) ds + f(t), \end{aligned} \quad (3.50)$$

де матриці $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $\Phi(t)$, функція $h(t)$, початкова функція $\varphi(t)$ та неоднорідність $f(t)$ наведені у прикладі 1, а лінійна функція

$$F(y(t), y'(t), t) := g(t) + M_0(t)y(t) + M_1(t)y'(t),$$

зображується наступним чином:

$$g(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad M_0(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_1(t) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $P_{A^*(t)} \neq 0$, породжуюча система для рівняння (3.50) вироджена, але матриця $A(t)$ — сталого рангу. Для породжуючої системи для рівняння (3.50) виконуються вимоги теореми у статті [57, с. 15], причому

має місце виродження першого порядку: $p = 1$. Породжуюча система (3.40) для рівняння (3.50) має розв'язок

$$y(t, c_3) = X_1(t) c_3 + K \left[g(s) \right] (t), \quad t \in [\pi; 2\pi], \quad c_3 \in \mathbb{R}^3,$$

незалежний від вектор-функції $\nu_1(t)$. Матриця $X_1(t)$, а також узагальнений оператор Гріпа задачі Коші для породжуючої диференціально-алгебраїчної системи у разі рівняння (3.47) наведено у прикладі 1. Умови (3.41) та (3.42) при цьому виконано, тому породжуюча крайова задача для рівняння (3.47) має єдиний розв'язок

$$y_0(t) = G[f(s), \varphi(s); \alpha](t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [\pi; 2\pi],$$

який неперервно та однозначно продовжує початкову функцію. Періодичний розв'язок рівняння (3.47)

$$y(t) = y_0(t, c_r) + x(t), \quad x(t) = X(t)v + \Psi(t)u, \quad u(c_0) = P_0 c_0, \quad v(c_1) = P_1 c_1,$$

не розв'язаного відносно похідної, визначає вектор $\check{c}$, який задовольняє лінійне рівняння $\mathcal{Q}c = 0$. Тут

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} \pi & 2 & -1 \\ -\pi & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матриці P_0 , P_1 наведено у прикладі 1. У наслідок однорідності останнє рівняння розв'язне у вигляді

$$\check{c} = P_{\mathcal{Q}_\rho} c_\rho, \quad c_\rho \in \mathbb{R}^1, \quad P_{\mathcal{Q}_\rho} = \pi \begin{pmatrix} 3 \\ -\pi \\ \pi \end{pmatrix}$$

— матриця, утворена з $\rho = 1$ лінійно-незалежних стовпців ортопроектора $P_{\mathcal{Q}}$. Оскільки умову (3.48) виконано, періодична крайова задача для рівняння (3.50) має єдиний розв'язок

$$y(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [\pi; 2\pi],$$

який неперервно продовжує початкову функцію

Зазначимо, що у випадку нерозв'язності інтегро-диференціальної крайової задачі (3.37), (3.38) її можна регуляризовати аналогічно [53]. Зазначимо також, що запропонована нами схема дослідження нелінійної інтегро-диференціальної крайової задачі (3.37), (3.38) може бути перенесена на інтегро-диференціальні крайові задачі з запізненням більш загального вигляду [6, 60, 36], а також при дослідженні нелінійної інтегро-диференціальної крайової задачі (3.37), (3.38) з матрицею при похідній змінного рангу [61].

Висновки до третього розділу

- 1) Знайдені умови розв'язності, а також конструкція розв'язків лінійної нетерової крайової задачі для інтегро-диференціальної системи, не розв'язаної відносно похідної у критичному та некритичному випадку.
- 2) Знайдені умови розв'язності, а також конструкція розв'язків нелінійної крайової задачі для інтегро-диференціальної системи, не розв'язаної відносно похідної у критичному та некритичному випадку.
- 3) Знайдені умови розв'язності, а також конструкція розв'язків нелінійної інтегро-диференціальної крайової задачі з відхиленням аргументу, не розв'язаної відносно похідної.

ВИСНОВКИ

1. У роботі знайдено конструктивні умови існування розв'язку нелінійної інтегро-диференціальної крайової задачі, не розв'язаної відносно похідної. Для знаходження розв'язку нелінійної інтегро-диференціальної крайової задачі, не розв'язаної відносно похідної на основі модифікації метода Ньютона-Канторовича побудовано ітераційну схему із квадратичною збіжністю.
2. Задля обґрунтування квадратичної збіжності модифікованого методу Ньютона-Канторовича у випадку недовизначеної системи запропоновано оригінальні умови збіжності. Отримані результати перенесено на нелінійні інтегро-диференціальні крайові задачі, не розв'язані відносно похідної, в тому числі, на інтегро-диференціальні крайові задачі з відхиленням аргументу.
3. Як приклади застосування запропонованих ітераційних схем, знайдені наближення до розв'язків нелінійних інтегро-диференціальних крайових задач, не розв'язаних відносно похідної. Продемонстровано, що точність знайдених за методом простих ітерацій наближень значно менша, ніж точність наближень, знайдених за допомогою методу Ньютона.

Бібліографія

- [1] *Agarwal, R.P., Franco, D., O'Regan, D.*: Singular boundary value problems for first and second order impulsive differential equations. *Equationes Math.* 69, 83-96 (2005).
- [2] *Albert, A.E.*: Regression and the Moore-Penrose Pseudo-Inverse, 180 (1972).
- [3] *Aliev, F.A., Larin, V.B.*: On the construction of a general solution to the generalized Sylvester equation. *Proceedings of IAM* 5(1), 3-10 (2016).
- [4] *Arnol'd, V.I.*: Singularities of caustics and wave fronts, *Math. Appl.*, 259 (1990).
- [5] *Akhiezer, N.I.* Theory of Approximation, 408 (1992).
- [6] *Azbelev, N.V., Maksimov, V.P., Rakhmatullina, L.F.*: Introduction to the Theory of Functional Differential Equations: Methods and Applications, 314 (2007).
- [7] *Azbelev, N.V., Domoshnitskii, A.I.*: On the question of linear differential inequalities, I. *Differential Equations*. – 27 (3) 257–263 (1991).
- [8] *Azbelev, N.V., Domoshnitskii, A.I.*: On the question of linear differential inequalities, II. *Differential Equations*, 27 (6). 641 – 647 (1991).
- [9] *Azbelev, N.V., Rakhmatullina, L.F.*: Stability of solutions of the equations with aftereffect. *Funct. Differ. Equ.* 5 (1-2), 39–55 (1998).
- [10] *Azbelev, N.V., Simonov, P.M.*: Stability of Differential Equations with Aftereffect. Taylor & Francis, 222 (2003).

- [11] *Bařnov D., Simeonov P.* Impulsive Differential Equations: Periodic Solutions and Applications. Longman Scientific & Technical. 232 (1993).
- [12] *Bellman, R., Cooke, K.L.* Differential-Difference Equations. Mathematics in Science and Engineering. Academic Press, 462 (1963).
- [13] *Bellman, R.:* Introduction to Matrix Analysis, 426 (1970).
- [14] *Ben-Israel A.:* A modified Newton-Raphson method for the solution of systems of equations. Israel Journ. Math. 3, 94-99.
- [15] *Benner, P., Chuiko, S., Zuyev, A.:* A periodic boundary value problem with switchings under nonlinear perturbations. Boundary Value Problems, 50, 1-12 (2023).
- [16] *Benner, P., Chuiko, S., Zuyev, A.:* Iterative schemes for periodic boundary-value problems with switchings. Journal of Mathematical Sciences, 211 (1) (2023).
- [17] *Benner, P., Bollhofer, M., Kressner, D., Mehl, C., Stykel, T.:* Numerical Algebra, Matrix Theory, Differential-Algebraic Equations and Numerical Algebra, Matrix Theory, Differential-Algebraic Equations and Control Theory. Springer International Publishing, 608 (2015).
- [18] *Benner, P., Seidel-Morgenstern, A., Zuyev, A.:* Periodic switching strategies for an isoperimetric control problem with application to nonlinear chemical reactions. Applied Mathematical Modelling, 69, 287-300 (2019).
- [19] *Berezanskii, L.M.:* Development of N.V. Azbelev's W-method in problems of the stability of solutions of linear functional-differential equations, Differ. Equations. 22 (5), 521 – 529 (1986).
- [20] *Berezanskii, L.M. Braverman, E., Idels, L.:* Delay differential equations with Hill's type growth rate and linear harvesting. Comput. Math. Appl. 49 (4) 549-563. (2005).
- [21] *Bihun, Ya.Y., Petryshyn, R., Skutar, I.D., Melnyk H.:* Multifrequency system with multipoint and integral conditions. Acta et Commentationes,

- Exact and Natural Sciences. 2 (12), 19–32 (2021). DOI: 10.36120/2587-3644.v12i2.19-32.
- [22] *Bihun, Ya.Y., Skutar, I.D., Bardan, A.O.*: Averaging in multi-frequency systems with linearly transformed arguments and integral delay. Буковинський математичний журнал, 11, 24–32 (2023). <https://bmj.fmi.org.ua/index.php/adm/article/view/1157>.
- [23] *Bogoliubov, N.N., Mitropolsky, Yu.A., Samoilenko, A.M.*: Methods of accelerated convergence in nonlinear mechanics. Springer-Verlag, 291 (1976).
- [24] *Boichuk, A.A.*: Boundary-value problems for systems of difference equations. Ukrainian Mathematical Journal 49 (6), 930-934 (1997). <https://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj/article/download/5068/6833>.
- [25] *Boichuk, A.A., Chuiko, S.M., Kalinichenko, Ya.V.*: Linear Noetherian boundary value problem for a matrix difference equation. Ukrainian Mathematical Journal 72(3), 386-402 (2020). doi:10.37863/umzh.v72i3.637.
- [26] *Boichuk, A.A., Chuiko, S.M., Kuz'mina, V.O.*: Nonlinear boundary-value problems not solved with respect to the derivative with delay. «International Workshop on functional differential equations». Ariel Israel, 11 – 12 (2022).
- [27] *Boichuk, A.A., Chuiko, S.M., Kuz'mina, V.O.*: Nonlinear integro-differential Fredholm type boundary value problems not solved with respect to the derivative with delay. «International Workshop QUALITDE–2022». Tbilisi, Georgia, 44–47 (2022). https://rmi.tsu.ge/eng/QUALITDE-2022/Reports_workshop_2022.pdf.
- [28] *Boichuk, A.A., Chuiko, S.M., Kuzmina, V.O.*: Nonlinear integrodifferential boundary-value problems with delay unsolved with respect to the derivative. Ukrainian Mathematical Journal 74, 1334 – 1347 (2023). DOI: <https://doi.org/10.1007/s11253-023-02139-0>.
- [29] *Boičuk A., Čuiko S., Ružičková M.*: Lineárne okrajové úlohy. Žilina: EDIS-vydavatel'stvo ŽU, 2013. — 177 p.

- [30] *Boichuk, A.A., Holovats'ka, I.A.*: Weakly nonlinear systems of integro-differential equations. Journal of Mathematical Sciences. 201 (3), 288-295 (2014).
- [31] *Boichuk, A.A., Holovats'ka, I.A.*: Boundary-value problems for systems of integrodifferential equations. Journal of Mathematical Sciences 203 (3), 306-321 (2014). <https://doi.org/10.1007/s10958-014-2135-1>.
- [32] *Boichuk, A.A., Krivosheya, S.A.*: Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type. Ukrainian Mathematical Journal 50 (8), 1162 - 1169 (1998). <https://doi.org/10.1007/BF02513089>.
- [33] *Boichuk, A.A., Krivosheya, S.A.*: A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equation. Differential Equations 37 (4), 464-471 (2001). <https://doi.org/10.1023/A:1019267220924>.
- [34] *Boichuk, A.A., Pokutnyi, A.A., Chistyakov, V.F.*: Application of perturbation theory to the solvability analysis of differential algebraic equations. Computational Mathematics and Mathematical Physics 53 (6), 777-788 (2013). <https://doi.org/10.1134/S0965542513060043>.
- [35] *Boichuk, A.A., Samoilenko, A.M.*: Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. VSP, 317 (2004).
- [36] *Boichuk, A.A., Samoilenko, A.M.*: Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2-th edition). Berlin; Boston De Gruyter 298 (2016). <https://doi.org/10.1515/9783110944679>.
- [37] *Cabada, A., Nieto, J.J., Franco, D., Trofimchuk, S.*: A generalization of the monotone method for second order periodic boundary value problem with impulses at fixed points. Dynam. Contin. Discrete Impuls. Systems. 7 (1), 145-158 (2000).
- [38] *Caswell H.*: Matrix population models: construction, analysis, and interpretation. Sinauer Associates 722 (2001). [https://doi.org/10.1016/S0304-3800\(02\)00002-9](https://doi.org/10.1016/S0304-3800(02)00002-9).

- [39] *Campbell, S.L.*: Limit behavior of solutions of singular difference equations. Linear algebra and its appl 23, 167-178 (1979). [https://doi.org/10.1016/0024-3795\(79\)90100-9](https://doi.org/10.1016/0024-3795(79)90100-9)
- [40] *Campbell, S.L.*: Singular Systems of differential equations. Pitman Advanced Publishing Program 178 (1980).
- [41] *Campbell, S.L.*: Singular Systems of differential equations II. Pitman Advanced Publishing Program 236 (1982).
- [42] *Campbell, S.L.*: A problem from genetics and the singular value decomposition. Preprint 9 (2019). DOI: 10.13140/RG.2.2.29979.92964
- [43] *Campbell, S.L., Meyer, C.D.*: Generalized Inverses of Linear Transformations. Pitman Publishing Limited 272 (1979).
- [44] *Campbell S.L.; Meyer C.D. Jr.* Generalized Inverses of Linear Transformations. — . Dover Pub. Inc., 272 (1991).
- [45] *Campbell, S.L., Petzold, L.R.*: Canonical forms and solvable singular systems of differential equations. SIAM J. Alg. Discrete Methods 4, 517-521 (1983).
- [46] *Chuiko, A.S.*: The convergence domain of an iterative procedure for a weakly nonlinear boundary value problem. Nonlinear Oscillations, 8 (2), 277-287 (2005).
- [47] *Chuiko, S.M.*: A Generalized Green operator for a boundary value problem with impulse action. Differential Equations 37 (8), 1189-1193 (2001). <https://doi.org/10.1023/A:1012440123296>.
- [48] *Chuiko, S.M.*: Domain of convergence of an iterative procedure for an autonomous boundary value problem. Nonlinear Oscillations (N.Y.), 9 (3), 405-422 (2006).
- [49] *Chuiko, S.M.*: On an approximate solution of boundary value problems by the least square method. Nonlinear Oscillations (N.Y.), 11 (4), 585-604 (2008).

- [50] *Chuiko, S.M.*: On the regularization of a linear Fredholm boundary-value problem by a degenerate pulsed action. Journal of Mathematical Sciences, 197 (1), 138-150 (2014).
- [51] *Chuiko, S.M.*: A generalized matrix differential-algebraic equation. Journal of Mathematical Sciences (N.Y.) 210 (1), 9- 21 (2015). <https://doi.org/10.1007/s10958-015-2545-8>.
- [52] *Chuiko S.*: Weakly nonlinear boundary value problem for a matrix differential equation. Miskolc Mathematical Notes 17 (1), 139-150 (2016). <https://doi.org/10.18514/MMN.2016.1312>.
- [53] *Chuiko, S.M.*: On the regularization of a matrix differential-algebraic boundary-value problem. Journal of Mathematical Sciences 220 (5), 591-602 (2017). <https://doi.org/10.1007/s10958-016-3202-6>.
- [54] *Chuiko, S.M.*: Nonlinear matrix differential-algebraic boundary value problem. Lobachevskii Journal of Mathematics 38 (2), 236-244 (2017). <https://doi.org/10.1134/S1995080217020056>.
- [55] *Chuiko, S.M.*: To the generalization of the Newton-Kantorovich theorem. Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. mathematics, applied mathematics and mechanics 85 (1), 62 – 68 (2017). <https://doi.org/10.26565/2221-5646-2017-85-05>.
- [56] *Chuiko, S.M.*: To the issue of a generalization of the matrix differential-algebraic boundary-value problem. Journal of Mathematical Sciences 227 (1), 13-25 (2017). <https://doi.org/10.1007/s10958-017-3571-5>.
- [57] *Chuiko, S.M.*: On a reduction of the order in a differential-algebraic system. Journal of Mathematical Sciences 235(1), 2-18 (2018). <https://doi.org/10.1007/s10958-018-4054-z>.
- [58] *Chuiko, S.M.*: On solvability of linear matrix boundary-value problem. Journal of Mathematical Sciences 230 (5), 799-801 (2018).

- [59] *Chuiko, S.M.*: The method of least squares in the theory of Noetherian differential-algebraic boundary-value problems. *Journal of Mathematical Sciences*, 242 (3), 381-392 (2019). <https://doi.org/10.1007/s10958-019-04484-7>.
- [60] *Chuiko, S.M.*: On the solution of a linear Noetherian boundary-value problem for a differential-algebraic system with concentrated delay by the method of least squares. *Journal of Mathematical Sciences* 246 (3), 622-630 (2020). <https://doi.org/10.1007/s10958-020-04768-3>.
- [61] *Chuiko, S.M.*: Differential-algebraic boundary value problems with variable rank of leading coefficient matrix. *Journal of Mathematical Sciences* 259 (1), 10 – 22 (2021). <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05597-8>.
- [62] *Chuiko S., Chuiko A., Kuzmina V.*: Boundary value problems for systems of singular integral-differential equations of Fredholm type. "International Workshop QUALITDE- 2021". Tbilisi, Georgia 45-48 (2021). https://rmi.tsu.ge/eng/QUALITDE-2021/Abstracts_workshop_2021.pdf.
- [63] *Chuiko, S.M., Chuiko, A.S.*: On the approximate solution of periodic boundary value problems with delay by the least-squares method in the critical case. *Nonlinear Oscillations (N.Y.)* 14 (3), 445-460 (2012). <https://doi.org/10.1007/s11072-012-0169-1>.
- [64] *Chuiko ,S.M., Chuiko, A.S., Chechetenko, V.O.*: On of solving nonlinear Noether integral-differential boundary value problems by the of Newton - Kantorovich method. *Uzhgorod Mathematical Papers* 1 (32), 147 – 158 (2018). DOI: 10.31861/bmj2018.01.122.
- [65] *Chuiko S., Chuiko E., Kuzmina V.*: Boundary value problems for systems of nonsingular integral-differential equations of Fredholm type with degenerate kernel. “ International Workshop QUALITDE – 2020”. Tbilisi, Georgia 52 – 56 (2020). https://rmi.tsu.ge/eng/QUALITDE-2020/Abstracts_workshop_2020.pdf.
- [66] *Chuiko S., Chuiko E., Kuzmina V.*: Boundary value problems for systems of linear nonsingular integral-differential equations of Fredholm type with

degenerate kernel. Матеріали математичного семінару пам'яті академіка НАН України А.М. Самойленка. Слов'янськ, 48-55 (2021).

- [67] *Chuiko, S.M., Chuiko, O.V., Kuz'mina, V.O.*: Solutions to the boundary-value problem for a matrix integrodifferential equations with degenerate kernel. Journ. Math. Sci. 263 (2), 341-349 (2022). <https://doi.org/10.1007/s10958-022-05929-2>.
- [68] *Chuiko, S.M., Chuiko, O.V., Kuz'mina, V.O.*: Nonlinear integrodifferential boundary-value problems unsolvable with respect to the derivative. Journal of Mathematical Sciences 270, 385 – 395 (2023). <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06352-x>.
- [69] *Chuiko, S.M., Chuiko, O.V., Kuz'mina, V.O.*: Solutions to the boundary-value problem for a matrix integro differential equations with degenerate kernel. Journal of Mathematical Sciences 263, 341 – 349 (2022). <https://doi.org/10.1007/s10958-022-05929-2>.
- [70] *Chuiko S., Kuz'mina V.*: Boundary value problems for systems of integrodifferential equations of Fredholm type. “ Mathematical Analysis, Differential Equations & Applications ”. Bishkek, Kyrgyz Republic, 30 (2021).
- [71] *Chuiko S., Kuz'mina V.*: On of solving nonlinear integral-differential boundary value problems by the of Newton-Kantorovich method. Four International Scientific Conference “ Differential equations and control theory ” 12 (2021). https://appmath.univer.kharkov.ua/pdf/DECT2021/DECT2021_Book.pdf.
- [72] *Chuiko, S.M., Nesmelova, O.V., Kuz'mina, V.O.*: Generalized Green's operator of the matrix integral-differential boundary value problem unsolved with respect to the derivative. Journal of Mathematical Sciences 276 (5), 603-613 (2023). <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06785-4>.
- [73] *Chuiko, S.M., Sysoev, D.V.*: Periodic Matrix Boundary-Value Problems with Concentrated Delay. Journal of Mathematical Sciences 243 (2), 326 – 336 (2019). <https://doi.org/10.1007/s10958-019-04542-0>.

- [74] *Dai L.*: Singular Control Systems. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg New York. London Paris 334 (1989).
- [75] *Davis, M.E.*: Boundary-Value Problems Ordinary Differential Equations. 441 (1984).
- [76] *Dennis, J.E., Schnabel, R.B.*: Numerical methods for Unconstrained Optimization and nonlinear equations. SIAM, 378 (1996). <https://libarch.nmu.org.ua/handle/GenofondUA/64456>.
- [77] *Erneux Th.* Applied Delay Differential Equations. Surveys and Tutorials in the Applied Mathematical Sciences. Springer Science, Business Media, 204 (2009).
- [78] *Gantmacher, F.R.*: The Theory of Matrices. AMS Chelsea Publishing: Reprinted by American Mathematical Society, 660 (2000).
- [79] *Gefter, S.L., Piven', A.L.*: Entire solutions of one linear implicit differential-difference equation in Banach spaces. Ukr. Mat. Zh. 70 (8), 1044 – 1057 (2018).
- [80] *Golub, G.H., Charles, F.L.* Matrix computations. Johns Hopkins, 694 (1996).
- [81] *Gopalsamy, K.*: Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics. Mathematics and Its Applications. — Kluwer Academic Publishers, 501 (1992).
- [82] *Gutlyanskii, V.Ya., Nesmelova, O.V., Ryazanov, V.I.*: The Dirichlet problem for the Poisson type equations in the plane. Доповіді Національної академії наук України 5, 10–16 (2020). <https://www.dopovidnanu.org.ua/sites/default/files/2020/5/2020-5-2.pdf>.
- [83] *Gutlyanskii, V.Ya., Nesmelova, O.V., Ryazanov, V.I., Yefimushkin, A.*: On boundary-value problems for semi-linear equations in the plane. Український математичний вісник, 18 (3) 359-388 (2021). <https://doi.org/10.37069/1810-3200-2021-18-3-5>.

- [84] *Gutlyanskii, V.Ya., Nesmelova, O.V., Ryazanov, V.I., Yefmushkin, A.:* Logarithmic potential and generalized analytic functions. Journal of Mathematical Sciences, 256 (6), (2021). DOI 10.1007/s10958-021-05457-5. <https://link.springer.com/article/10.1007/s10958-021-05457-5>.
- [85] *Hairer E., Wanner G.:* Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems (Second Editions). Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 616 (2006).
- [86] *Hale, J.K.:* Theory of Functional Differential Equations. Springer-Verlag, 293 (1975).
- [87] *Henderson, H.V., Searle, S.R.:* Vec and vech operators for matrices, with some uses in Jacobian and multivariate statistics. Canadian journal statistics 7, 65 – 81 (1979). <https://doi.org/10.2307/3315017>.
- [88] *Kantorovich, L.W., Akilov, G.P.:* Funktionalanalysis in normierten Raumen. Akademie Verlag, 622 (1964).
- [89] *Keskin, A.U.:* Boundary Value Problems for Engineers with MATLAB Solutions. Springer Nature Switzerland AG, 517 (2019).
- [90] *Khusainov, D.Ya.; Diblik, J.; Shatyrko, A.V.; Hahurin, Z.R.:* Optimal stabilization in systems of linear differential equations. Journal of Optimization, Differential Equations and their Applications. (2024). DOI: 10.15421/142405. EID: 2-s2.0-85193231302.
- [91] *Korobov, V.I.:* Almost linearizable control systems. Mathematics of Control, Signals, and Systems, 33 (3) 473-497(2021).
- [92] *Korobov, V.I., Revina, T.V.:* On the feedback synthesis for an autonomous linear system with perturbations. Journal of Dynamical and Control Systems (2024). DOI:10.1007/s10883-024-09690-4.
- [93] *Korol, I.I., Ronto, M.I.:* Investigation and solution of boundary-value problems with parameters by numerical-analytic method. Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal. 46 (8), 1031-1042 (1994).

- [94] *Lakshmikantham, V., Bainov, D., Simeonov, P.*: Theory of Impulsive Differential Equations. World Scientific, 272 (1989).
- [95] *Lamour, R., Marz, R., Weinm, E.*: Boundary-Value Problems for Differential-Algebraic Equations: A Survey. Humboldt-University of Berlin, 648 (2013).
- [96] *Lancaster, P., Tismenetsky, M.*: Theory of matrices: with applications. Academic Press, 280 (1985).
- [97] *Leslie, P.H.*: The use of matrices in certain population mathematics. Biometrika 33 (3), 183 – 212 (1945).
- [98] *Magnus, J.R., Neudecker H.*: Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics, 2nd Edition. Wiley 424 (1999). <https://sci-hub.se/downloads/2019-11-21/06/magnus2019.pdf>.
- [99] *Malkin, I.G.*: Theory of stability of motion. Atomic Energy Commission, Office of Technical Information, 454 (1958).
- [100] *Malkin, I.G.*: Some Problems in the Theory of Nonlinear Oscillations. US Atomic Energy Commission, 589 (1959).
- [101] *Mary, H.*: Models and Analogies in Science. Univ. Notre Dame Press, 184 (1966).
- [102] *Myshkis, A.D.*: On the relation between systems with switching and hybrid systems. Funct. Differ. Equ. 11, 467-473 (2004).
- [103] *Nashed, M.Z.*: Generalized Inverses and Applications. Academic Press 1054 (1976).
- [104] *Ortega, J.M., Rheinboldt, W.C.* Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables. Academic Press, 572 (1970).
- [105] *Panasenko, E.V., Pokutnyi, O.O.*: Bifurcation conditions for the solutions of the Lyapunov equation in a Hilbert space. Journal of Mathematical Sciences 236 (3), 313-332 (2019).

- [106] *Panasenko, E.V., Pokutnyi, O.O.*: Nonlinear boundary-value problems for the Lyapunov equation in the space L^p . Journal of Mathematical Sciences 246 (3), 394-409 (2020).
<https://doi.org/10.1007/s10958-020-04747-8>.
- [107] *Penrose, R.*: A generalized inverse for matrices. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 51 (3), 406-413 (1955).
[doi:10.1017/S0305004100030401](https://doi.org/10.1017/S0305004100030401).
- [108] *Penrose, R.*: On best approximate solution of linear matrix equations. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 52 (1), 17-19 (1956).
- [109] *Perestyuk, N.A., Vlasenko, L.A.*: On the Solvability of Impulsive Differential-Algebraic Equations. Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal, 57 (4), 458-468 (2005).
- [110] *Rao, C. R; Mitra, S.K.*: Generalized Inverse of Matrices and its Applications. John Wiley & Sons, 240 (1971).
- [111] *Ronto, M., Samoilenko, A.M.*: Numerical-Analytic Methods in the Theory of Boundary-Value Problems. World Scientific Publishing Co., 455 (2000).
- [112] *Rutkas, A.G.*: The Cauchy problem for the equation, 11 (11), 1996-2010 (1975).
- [113] *Samoilenko, A.M., Boichuk, A.A., Krivosheya, S.A.*: Boundary value problems for systems of integro-differential equations with Degenerate Kernel. Ukrainian Mathematical Journal 48 (11), 1785-1789 (1996).
<https://doi.org/10.1007/BF02529500>.
- [114] *Samoilenko, A.M., Perestyuk, N.A.* Impulsive Differential Equations. World Scientific Series on Nonlinear Science, Ser.A, Vol. 14, 452 (1995).
- [115] *Sčhwabik, S.*: Differential Equations with Interface Conditions. Časopis Pro pestovani matematiky, 105, 391 — 410 (1980).

- [116] *Shatyrko, A.*: Some methodological aspects of mathematical modeling in dynamic systems // International Science Journal of Engineering & Agriculture. 3 (1) 8-14, (2024). DOI: 10.46299/j.isjea.20240301.02.
- [117] *Stallard, F.W.*: Differential systems with interface conditions. Oak Ridge National Laboratory Report1876.
- [118] *Nashed, M.Z.*: Generalized Inverses and Applications. New York: Academic Press 1054 (1976).
- [119] *Skrypnik, I.I.*: Removability of isolated singularities for anisotropic elliptic equations with gradient absorption. Israel Journal of Mathematics 215 (1), 163-179 (2016). <https://doi.org/10.1007/s11856-016-1377-7>
- [120] *Stanimirovic, P.S., Stojanovic I., Pappas D., Chountasis S.*: On removing blur in images using least squares solutions. Filomat 30 (14), 3855-3866 (2016). <https://journal.pmf.ni.ac.rs/filomat/index.php/filomat/article/view/2014/1430>
- [121] *Vetter, W.J.*: Linear structures and solutions of linear matrix equation. Linear algebra and its appl 10, 181 – 188 (1975). [https://doi.org/10.1016/0024-3795\(75\)90010-5](https://doi.org/10.1016/0024-3795(75)90010-5).
- [122] *Vejvoda, O.*: On perturbed nonlinear boundary-value problems. Czech. Math. J., 11, 323-364 (1961).
- [123] *Vogel, T.*: Theorie des systemes evolutifs. Goutnier – Villons 172 (1965).
- [124] *Weierstrass, K.*: Zur theorie der bilinearen und quadratischen formen. Monatsh. Akad. Wiss. Berlin 310-338 (1867).
- [125] *Wilson, H.R., Cowan, J.D.*: Excitatory and inhibitory interactions in localized populations of model neurons. Biophysics. Journ. 12 (1), 1-24 (1972). DOI: 10.1016/S0006-3495(72)86068-5.
- [126] *Wexler, D.*: On Boundary Value Problems for an Ordinary Linear Differential Systems. Ann. Vft. Pura et Appl., 80, 123-136 (1968).

- [127] *Wilson, H.R., Cowan, J.D.*: A mathematical theory of the functional dynamics of cortical and thalamic nervous tissue 13 (2), 55-80 (1973). <https://doi.org/10.1007/BF00288786>.
- [128] *Wolfram St.* The Mathematica Book. Wolfram Media und Cambridge University Press, 5-th Edition. — Wolfram Media and Cambridge University Press. — Cambridge. — 2003. — 1470 p.
- [129] *Zill, D.G., Cullen, M.R.*: Differential Equations with Boundary-Value problems. Brooks Cole, Cengage Learning, 526 (2009).
- [130] *Zuyev, A.*: Partial asymptotic stabilization of nonlinear distributed parameter systems. Automatica 41 (1), 1 – 10 (2005).
- [131] *Бойчук, О.А., Чуйко, С.М.*: Конструктивні методи аналізу крайових задач теорії нелінійних коливань. Наукова думка, 232 (2023). DOI: <https://doi.org/10.37863/6581477912-64>.
- [132] *Кононов, Ю.М.*: Про стійкість обертання у середовищі з опором вільної системи двох гіроскопів Лагранжа пов'язаних пружним шарніром Гукка. Праці ІПММ. 1, 23-32 (2024).
- [133] *Кононов, Ю.М.*: Про стійкість обертання в середовищі з опором вільної системи трьох пружно зв'язаних твердих тіл. Прикладна механіка, 60 (1) (2024).
- [134] *Кононов, Ю.М., Несмелова, О.В., Святенко, Я.І.*: Про стійкість обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа на підвісі з урахуванням пружності сферичних шарнірів. Праці ІПММ. 1, 33-43 (2024).
- [135] *Кравчук, М.*: Вибрані математичні праці. Задруга, 792 (2002).
- [136] *Самойленко, А.М., Шкіль, М.І., Яковець, В.П.*: Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженням. Вища школа, 296 (2000).
- [137] *Хусаїнов, Д.Я., Шатирко, А.В., Шакотько, Т.І.*: Отримання умов збіжності процесів навчання у математичних моделях нейродинаміки з післядією. Проблеми керування та інформатики, 56 5-16 (2022).

- [138] *Чуйко, С.М.*: Про розв'язання матричного рівняння Сильвестра. Вісник Одеського національного університету 1 (21), 49-57 (2014). http://nbuv.gov.ua/UJRN/Vonu_math_2014_19_1_7.
- [139] *Чуйко, С.М.*: Про розв'язання матричних рівнянь Ляпунова. Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна 1120, 85-94 (2014). http://nbuv.gov.ua/UJRN/VKhIMA_2014_1120_69_8.
- [140] *Чуйко, С.М.*: Про розв'язання лінійних матричних рівнянь. Науковий вісник Харківського університету ім. В.Н. Каразіна 81, 28-34 (2015). http://vestnik-math.univer.kharkov.ua/Vestnik-KhNU-82-2015_merged.pdf.
- [141] *Чуйко, С.М.*: Про узагальнення теореми Ньютона-Канторовича у банахововому просторі. Доп. НАН України 6, 22 - 31 (2018). <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.06.022>.
- [142] *Чуйко, С.М., Кузьміна, В.О.*: Слабконелінійні інтегрально-диференціальні крайові задачі. International conference "International Conference of Young Mathematicians" 78 (2021).
- [143] *Чуйко, С.М., Кузьміна, В.О.*: Положення рівноваги нелінійних періодичних інтегрально-диференціальних крайових задач, не розв'язаних відносно похідної. Міжнародна наукова конференція, присвячена 55-річчю факультету математики та інформатики, 342-343 (2023).
- [144] *Чуйко, С.М., Кузьміна, В.О.*: Інтегрально-диференціальні крайові задачі, не розв'язані відносно похідної. XXI International Scientific Practical Conference Shevchenkivska Vesna, 58-59 (2024). https://probability.knu.ua/shv2024/ShV_2024.pdf
- [145] *Чуйко, С.М., Несмелова, О.В., Калініченко, Я.В.*: Умови розв'язності задачі, оберненої до задачі Коші для різницево-алгебраїчного рівняння. Нелінійні коливання 24 (3), 422-434 (2021).
- [146] *Чуйко С.М., Чистяков В.Ф.*: Про положення рівноваги виродженої диференціально-алгебраїчної системи. Міжнародна наукова конференція "Крайові задачі, теорія функцій та їх застосування" 79 (2014).

- [147] *Чуйко С.М., Чечетенко В.В.:* Узагальнений оператор Гріна матричної інтегрально-диференціальної крайової задачі. Міжнародна наукова конференція “ Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках й інформаційних технологіях ” 114 (2018). <http://fmi50.pp.ua/files/FMI50-Materials.pdf>.
- [148] *Чуйко, С.М., Чуйко, О.В.:* Регуляризація періодичної крайової задачі за допомогою імпульсного впливу. Буковинський математичний журнал 1 (3-4), 158-161 (2013).
- [149] *Чуйко, С.М., Чуйко, О.В., Кузьміна, В.О.:* Невироджені лінійні інтегрально-диференціальні крайові задачі, не розв’язані відносно похідної. Буковинський математичний журнал 8 (2), 127-138 (2020). <https://bmj.fmi.org.ua/index.php/adm/article/view/1004/906>.
- [150] *Чуйко С., Чуйко О., Кузьміна В.:* Умови розв’язності задачі, оберненої до інтегро-диференціального рівняння Фредгольма з виродженим ядром. Міжнародна наукова конференція "Прикладна математика та інформаційні технології", присвячена 60-річчю кафедри прикладної математики та інформаційних технологій Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича (2022). <http://www.amit60.fmi.org.ua/files/AMIT2022-Materials.pdf>.
- [151] *Чуйко, С.М., Чуйко, О.С., Кузьміна, В.О.:* Умови розв’язності задачі, оберненої до лінійного автономного інтегро-диференціального рівняння типу Фредгольма з виродженим ядром. Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України 36, 54 – 59 (2022) . <https://doi.org/10.32782/1683-4720-2022-36-5>.
- [152] *Чуйко, С.М., Чуйко, О.С., Чечетенко, В.А.:* Оператор Гріна матричної інтегрально-диференціальної крайової задачі. Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України 31, 151 – 162 (2017). <https://drive.google.com/file/d/13AGU3UtzejobjFGoh-Vx7MtJ2exBQzF/view>.

- [153] *Яковець, В.П., Головченко О.В.:* Асимптотичні розв'язки сингулярно збуреної лінійної системи диференціальних рівнянь з іррегулярною особливою точкою. Нелінійні коливання, 12 (3) 417-432 (2009).
- [154] *Яковець, В.П., Віра, М.Б.:* Про побудову асимптотичних розв'язків доточкових крайових задач для вироджених сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь. Нелінійні коливання, 13 (2), 272-286 (2010).
- [155] *Яковець, В.П.:* Асимптотичне розв'язання задачі Коші для лінійної сингулярно збуреної системи у випадку кратного спектра головного оператора. Нелінійні коливання, 16 (2) 270-288 (2013).

Додаток

СПИСОК НАУКОВИХ ПРАЦЬ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

В яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. Chuiko, S.M., Chuiko, O.V., Kuz'mina, V.O.: Solutions of the boundary-value problem for a matrix integrodifferential equation with degenerate kernel. Journal of Mathematical Sciences 263, 341 – 349 (2022).
DOI: 10.1007/s10958-022-05929-2
2. Chuiko, S.M., Chuiko, O.V., Kuzmina, V.O.: Nonlinear integrodifferential boundary-value problems unsolvable with respect to the derivative. Journal of Mathematical Sciences 270, 385 – 395 (2023).
DOI: 10.1007/s10958-023-06352-x
3. Boichuk, O.A., Chuiko, S.M., Kuzmina, V.O.: Nonlinear integrodifferential boundary-value problems with deviating argument unsolved with respect to the derivative. Ukrainian Mathematical Journal 74, 1334 – 1347 (2023).
DOI: 10.1007/s11253-023-02139-0
4. Chuiko, S.M., Nesmelova, O.V., Kuz'mina, V.O.: Generalized Green's operator of the matrix integral-differential boundary value problem unsolved with respect to the derivative. Journal of Mathematical Sciences 276, 603 – 613 (2023) DOI: 10.1007/s10958-023-06785-4
5. Чуйко, С.М., Чуйко, О.В., Кузьміна, В.О.: Невироджені лінійні інтегрально-диференціальні крайові задачі, не розв'язані відносно похі-

дної. Буковинський математичний журнал 8, 127-138 (2020). DOI: 10.31861/bmj2020.02.12

6. Чуйко, С.М., Чуйко, О.С., Кузьміна, В.О.: Умови розв'язності задачі, оберненої до лінійного автономного інтегро-диференціального рівняння типу Фредгольма з виродженим ядром. Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України 36(1), 54 – 60 (2022). DOI: 10.32782/1683-4720-2022-36-5
7. Чуйко, С.М., Чуйко, О.С., Кузьміна, В.О.: Положення рівноваги нелінійних інтегрально-диференціальних крайових задач, не розв'язаних відносно похідної. Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України 37(1), 118-133 (2023). DOI: 10.37069/1683-4720-2023-37-11
8. Чуйко, С.М., Чуйко, О.С., Чечетенко, В.О.: Оператор Гріна матричної інтегрально-диференціальної крайової задачі. Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України 31, 151 – 162 (2017).
9. Chuiko, S.M., Chuiko, A.S., Chechetenko, V.O.: On of solving nonlinear Noether integral-differential boundary value problems by the of Newton–Kantorovich method. Uzhgorod Mathematical Papers 1 (32), 147 – 158 (2018). DOI: 10.31861/bmj2018.01.122.

Які засвідчують апробацію матеріалів дисертаційної роботи:

1. Чуйко, О., Чечетенко, В.: Узагальнений оператор Гріна матричної інтегрально-диференціальної крайової задачі. Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках й інформаційних технологіях», Чернівці, 114 (2018).
<http://fmi50.pp.ua/files/FMI50-Materials.pdf>
2. Chuiko S., Chuiko E., Kuzmina V.: Boundary value problems for systems of nonsingular integral-differential equations of Fredholm type with degenerate kernel. «International Workshop QUALITDE – 2020». Tbilisi, Georgia, 52 – 56 (2020).

https://rmi.tsu.ge/eng/QUALITDE-2020/Abstracts_workshop_2020.pdf

3. Чуйко, С.М., Кузьміна, В.О.: Слабконелінійні інтегрально-диференціальні крайові задачі. International Conference of Young Mathematicians. Kyiv, Ukraine, 78 (2021).

https://www.imath.kiev.ua/~young/youngconf2021/Abstracts_2021.pdf

4. Chuiko S., Kuzmina V.: Boundary value problems for systems of integral-differential equations of Fredholm type. «Mathematical Analysis, Differential Equations & Applications». Bishkek, Kyrgyz Republic, 30 (2021).

5. Chuiko S., Chuiko E., Kuzmina V.: Boundary value problems for systems of linear nonsingular integral-differential equations of Fredholm type with degenerate kernel. Матеріали математичного семінару пам'яті академіка НАН України А.М. Самойленка. Слов'янськ, 48-55 (2021).

6. Chuiko S., Kuzmina V.: On of solving nonlinear integral-differential boundary value problems by the of Newton-Kantorovich method. 5 International Scientific Conference «Differential equations and control theory». Kharkiv, 12 (2021).

https://appmath.univer.kharkov.ua/pdf/DECT2021/DECT2021_Book.pdf

7. Chuiko S., Chuiko A., Kuzmina V.: Boundary value problems for systems of singular integral-differential equations of Fredholm type. «International Workshop QUALITDE – 2021». Tbilisi, Georgia, 45 – 48 (2021).

https://rmi.tsu.ge/eng/QUALITDE-2021/Abstracts_workshop_2021.pdf

8. Boichuk, O.A., Chuiko, S.M., Kuz'mina, V.O.: Nonlinear boundary-value problems not solved with respect to the derivative with delay. «International Workshop on functional differential equations». Ariel, Israel, 11 – 12 (2022).

9. Чуйко С., Чуйко О., Кузьміна В.: Умови розв'язності задачі, оберненої до інтегро-диференціального рівняння Фредгольма з виродженим ядром. «Прикладна математика та інформаційні технології», присвячена 60-річчю кафедри прикладної математики та інформаційних те-

хнологій Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича. Чернівці, 88 – 91 (2022).

<http://www.amit60.fmi.org.ua/files/AMIT2022-Materials.pdf>

10. Boichuk, O.A., Chuiko, S.M., Kuz'mina, V.O.: Nonlinear integro-differential Fredholm type boundary value problems not solved with respect to the derivative with delay. «International Workshop QUALITDE – 2022». Tbilisi, Georgia, 44 – 47 (2022).

https://rmi.tsu.ge/eng/QUALITDE-2022/Reports_workshop_2022.pdf

11. Boichuk, A.A., Chuiko, S.M., Kuzmina, V.O.: Nonlinear integro-differential boundary value problems Fredholm type not solved with respect to the derivative with delay in critical case. Математичний семінар до 85-річного ювілею академіка НАН України А.М. Самойленка. Магдебург, Німеччина, 31 – 34 (2023).

12. Чуйко, С.М., Чуйко, О.С., Кузьміна, В.О.: Умови розв'язності задачі, оберненої до інтегро-диференціального рівняння Фредгольма. Міжнародна конференція молодих математиків. Київ, 2023.

https://www.imath.kiev.ua/~young/youngconf2023/Abstracts_2023/DEMF/Chuiko-Kuzmina.pdf

13. Чуйко, С.М., Кузьміна, В.О.: Положення рівноваги нелінійних періодичних інтегрально-диференціальних крайових задач, не розв'язаних відносно похідної. Міжнародна наукова конференція «Математика та інформаційні технології», присвячена 55-річчю факультету математики та інформатики, Чернівці, 342 – 343 (2023).

<https://fmi.chnu.edu.ua/media/qhufs0d5/materialy-mizhnorodnoi-naukovoi-konferentsii-fmi55.pdf>

14. Чуйко, С.М., Кузьміна, В.О.: Інтегрально-диференціальні крайові задачі, не розв'язані відносно похідної. XXI International Scientific Practical Conference «Shevchenkivska Vesna - 2024» Kyiv, Ukraine, 57 – 58 (2024).

https://probability.knu.ua/shv2024/ShV_2024.pdf