

**НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ  
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ**

**«ЗАТВЕРДЖУЮ»**

Директор ІПММ НАН України  
академік НАН України



 Ігор СКРИПНІК

«26» вересня 2024 р.

**РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ**

**«Модулі в сучасній теорії відображень»**

підготовки здобувачів ступеня вищої освіти  
треть (освітньо-науковий)  
доктора філософії

галузь знань 11 Математика та статистика

спеціальність 111 Математика

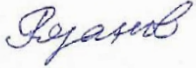
Робоча навчальна програма навчальної дисципліни «Модулі в сучасній теорії відображень» для здобувачів наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 Математика

Розробник:

Севостьянов Євген Олександрович, д.ф.-м.н., с.н.с., професор кафедри математичного аналізу Житомирського державного університету імені Івана Франка, провідний науковий співробітник відділу теорії функцій ІПММ НАН України

Робочу програму схвалено на засіданні відділу теорії функцій  
Протокол № 2 від 24.09.2024 року.

Завідувач відділу



В.І. Рязанов

Схвалено Науково-методичною радою Інституту прикладної математики і механіки НАН України

Протокол № 4 від 26.09.2024 року.

Голова науково-методичної ради



О.В. Несмелова

### 1. Опис навчальної дисципліни

| Найменування показників                                         | Галузь знань, напрям підготовки, освітньо-кваліфікаційний рівень | Характеристика навчальної дисципліни |
|-----------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|--------------------------------------|
| Кількість кредитів -4                                           | Галузь знань:<br>11 Математика та статистика                     | Вибіркова                            |
| Загальна кількість годин – 120                                  | Спеціальність:<br>111 Математика                                 | Рік підготовки:                      |
|                                                                 |                                                                  | 1-2                                  |
|                                                                 |                                                                  | Семестр                              |
|                                                                 |                                                                  | 2-3                                  |
|                                                                 |                                                                  | Лекції                               |
| Тижневих годин:<br>аудиторних – 1,5<br>самостійної роботи – 1,7 | Освітньо-кваліфікаційний рівень:<br>доктор філософії             | 28 год                               |
|                                                                 |                                                                  | Практичні                            |
|                                                                 |                                                                  | 28 год                               |
|                                                                 |                                                                  | Самостійна робота                    |
|                                                                 |                                                                  | 64 год                               |
|                                                                 |                                                                  | Вид контролю: іспит                  |

## 1. Мета, завдання та очікувані результати навчальної дисципліни.

**Метою** навчальної дисципліни навчальної дисципліни «Модулі в сучасній теорії відображень» є поглиблене вивчення теорії аналітичних функцій та їх узагальнень у вигляді квазіконформних відображень та відображень з обмеженим спотворенням, ознайомлення з означенням і елементарними властивостями квазіконформних відображень, вміння відокремлювати їх від решти класів відображень, а також ознайомлення з апаратом досліджень квазіконформних відображень у вигляді модулів сімей кривих.

### Завдання навчальної дисципліни:

- Формування основних понять теорії квазіконформних відображень: область, відображення, конформні і квазіконформні відображення, відображення з обмеженим і скінченим спотворенням, відображення класів Соболева, узагальнена частинна похідна, модуль сімей кривих, матрична норма похідної, комплексні, максимальні, внутрішні і зовнішні дилатації відображень, спотворення при відображенні.
- Ознайомлення з елементарними властивостями модуля сімей кривих (невід’ємність, напівадитивність, мінорування).
- Отримання формули для модуля сімей кривих, що з’єднують обкладинки сферичного кільця.
- Отримання формули для модуля сімей кривих, що з’єднують протилежні сторони прямокутника.
- Дослідження взаємозв’язку між аналітичними функціями, конформними відображеннями на площині і у просторі і квазіконформними відображеннями на площині та у просторі.
- Вивчення геометричного означення квазіконформних відображень і встановлення його зв’язку з відповідним аналітичним означенням.

### Очікувані результати навчальної дисципліни

#### Загальні компетентності:

1. Аналіз і синтез. Здатність до аналізу та синтезу на основі логічних аргументів та перевірених фактів; навички управління інформацією (уміння знаходити та аналізувати інформацію з різних джерел) (ЗК 1).

2. Дослідницька здатність. Компетентності ініціювати та виконувати (індивідуально або в науковій групі) наукові дослідження, що приводять до отримання нових знань; здатність застосовувати знання на практиці. (ЗК 2).

3. Гнучкість мислення. Набуття гнучкого способу мислення, який дає можливість зрозуміти й розв’язати проблеми та задачі, зберігаючи при цьому критичне відношення до усталених наукових концепцій (ЗК 3).

4. Комунікативні навички. Здатність ефективно спілкуватися із спеціальною та загальною аудиторіями, а також представляти складну інформацію у зручний та зрозумілий спосіб усно і письмово,

використовуючи відповідну технічну лексику та методи; навички використання інформаційних і комунікаційних технологій; здатність спілкуватися рідною та другою іноземною мовою як усно, так і письмово (ЗК 6).

5. Міжнародний кругозір. Здатність працювати в міжнародному середовищі, ставитися із повагою до національних та культурних традицій, способів роботи інших членів групи (ЗК 7).

6. Популяризаційні навички. Вміння спілкуватися із нефаківцями; здатність провести усну презентацію та написати зрозумілу статтю за результатами проведених досліджень, а також щодо сучасних концепцій у математиці для нефаківців у цій галузі (ЗК 8).

7. Етичні установки. Етика поведінки в наукових дослідженнях; турбота про якість результату (ЗК 11).

Особисті якості. Здатність до навчання, саморозвитку та самовдосконалення протягом життя; визначеність і наполегливість щодо поставлених завдань і взятих обов'язків (ЗК 12).

#### **Фахові компетентності:**

1. Здатність застосовувати сучасну методологію, загальні та спеціальні методи наукового дослідження за спеціальністю та обраною спеціалізацією (ФК 2).
2. Здатність логічно мислити, формулювати, строго доводити та перевіряти правильність математичних тверджень (ФК 4).
3. Здатність застосовувати спеціальні методи в теорії відображень та теорії аналітичних функцій і їх узагальнень (ФК 11).

#### **Програмні результати навчання:**

1. Знати та розуміти традиційні та передові тенденції в галузі математики, етапи історичного розвитку математичних знань і парадигм, формування поглибленої системи наукових знань за напрямом досліджень (ПРН 1).
2. Знати основні принципи, форми та методи проведення наукових досліджень в галузі математики, володіти математичним апаратом в об'ємі, достатньому для професійної діяльності (ПРН 3).
3. Вміти за допомогою теоретичного математичного апарату досліджувати різноманітні природні явища та процеси, проводити аналіз впливу на них різних факторів, а також вивчати взаємодію між явищами з метою отримання переконливо доведених і корисних фундаментальних та практичних результатів (ПРН 5).
4. Здійснювати професійну письмову й усну комунікацію українською та іноземними мовами. Уміти працювати зі спеціальною літературою та наукометричними базами даних, в тому числі іноземною мовою (ПРН 8).
5. Вміти організувати неперервний власний саморозвиток і самовдосконалення, набуття гнучкого способу мислення при творчому дослідженні, в тому числі прикладних математичних проблем (ПРН 10).

6. Вміти формулювати наукові проблеми з огляду на цінні стін орієнтири сучасного суспільства та стану її поточного дослідження (ПРН 11).
7. Розв'язувати фундаментальні та прикладні задачі придатними математичними методами, перевіряти умови виконання математичних тверджень, коректно переносити умови та твердження на нові класи об'єктів, знаходити й аналізувати відповідності між поставленою задачею й відомими моделями, будувати та досліджувати нові математичні моделі (ПРН 12).
8. Знати теоретичні основи і застосовувати спеціальні методи дослідження в теорії функцій комплексного змінного та теорії квазіконформних відображень (ПРН 13).
9. Володіти основними аналітичними та геометричними методами дослідження аналітичних функцій і вивчення їх основних властивостей (ПРН 14).

За результатами вивчення навчальної дисципліни здобувач доктора філософії повинен:

**знати:**

- основні теореми збіжності і компактності квазіконформних відображень.
- критерії асимптотичної конформності і однорідності гомеоморфних рішень рівнянь Бельтрамі.
- критерії асимптотичної симетрії гомеоморфних рішень рівнянь Бельтрамі на межі.

**вміти:**

- використовувати теорію інфінітезімального аналізу для вивчення локальної і граничної поведінки квазіконформних відображень.
- вміння використовувати теорію збіжності квазіконформних відображень при аналізі їх локальної і граничної поведінки.
- використовувати теорію інфінітезімального аналізу для вивчення регулярності квазіконформних кривих.

## 2. Програма навчальної дисципліни

**Тема 1.** Поняття про класи Соболева (на рівні означень). Поняття про відображення, гомеоморфізм, приклади. Лінійні відображення.

**Тема 2.** Головні числа и головні вектори. Норма і визначник відображення, їх зв'язок з головними числами.

**Тема 3.** . Означення і приклади квазіконформних відображень. Означення внутрішньої і зовнішньої дилатацій. Зв'язок дилатацій з головними числами (правила обрахування). Голоморфні функції як окремий випадок квазіконформних відображень.

**Тема 4.** Відображення з обмеженим спотворенням. Відкриті та дискретні відображення

**Тема 5.** Означення комплексної і максимальної дилатацій. Доведення того, що максимальна дилатація голоморфного відображення дорівнює 1.

**Тема 6.** Геометричний сенс квазіконформності. Внутрішня і зовнішня дилатації як відношення об'ємів кулі та еліпсоїда (з доведенням).

**Тема 7.** Квазіконформні відображення на площині. Правило підрахунку норми похідної, якобіану і максимальної дилатації через похідні по  $z$  і  $\bar{z}$  спряжене.

**Тема 8.** Радіальні відображення і правила обрахування дилатацій для них

**Тема 9.** Дотичні і радіальні розтяги, їх зв'язок з відповідними похідними за напрямком (з доведенням).

**Тема 10.** Обрахування похідних по  $z$  і  $\bar{z}$  спряженому від складної функції (без доведення).

**Тема 11.** Поняття про модуль сімей кривих. Модуль кільця.

**Тема 12.** Модулі сім'ї кривих, що з'єднує протилежні сторони прямокутника.

**Тема 13.** Нерівність Полецького для квазіконформних відображень.

**Тема 14.** Обернена нерівність Полецького. Відображення зі скінченим спотворенням і  $Q$ -гомеоморфізми (на рівні означень). Підведення підсумків курсу.

### 3. Структура навчальної дисципліни

| Назва теми                                                                                                                                                                                                                             | Кількість годин |              |                   |                   |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|--------------|-------------------|-------------------|
|                                                                                                                                                                                                                                        | Усього          | у тому числі |                   |                   |
|                                                                                                                                                                                                                                        |                 | Лекції       | Практичні заняття | Самостійна робота |
| 1                                                                                                                                                                                                                                      | 2               | 3            | 4                 | 5                 |
| Тема 1. Поняття про класи Соболева (на рівні означень). Поняття про відображення, гомеоморфізм, приклади. Лінійні відображення                                                                                                         | 8               | 2            | 2                 | 4                 |
| Тема 2. Головні числа и головні вектори. Норма і визначник відображення, їх зв'язок з головними числами                                                                                                                                | 8               | 2            | 2                 | 4                 |
| Тема 3. Означення і приклади квазіконформних відображень. Означення внутрішньої і зовнішньої дилатацій. Зв'язок дилатацій з головними числами (правила обрахування). Голоморфні функції як окремий випадок квазіконформних відображень | 8               | 2            | 2                 | 4                 |
| Тема 4. Відображення з обмеженим спотворенням. Відкриті та дискретні відображення                                                                                                                                                      | 8               | 2            | 2                 | 4                 |
| Тема 5. Означення комплексної і максимальної дилатацій. Доведення того, що максимальна дилатація голоморфного відображення дорівнює 1.                                                                                                 | 8               | 2            | 2                 | 4                 |
| Тема 6. Геометричний сенс квазіконформності. Внутрішня і зовнішня дилатації як відношення об'ємів кулі та еліпсоїда (з доведенням).                                                                                                    | 8               | 2            | 2                 | 4                 |
| Тема 7. Квазіконформні відображення на площині. Правило підрахунку норми похідної, якобіану і максимальної дилатації через похідні по $z$ і $\bar{z}$ спряжене                                                                         | 10              | 2            | 2                 | 6                 |
| Тема 8. Радіальні відображення і правила обрахування дилатацій для них                                                                                                                                                                 | 8               | 2            | 2                 | 4                 |
| Тема 9. Дотичні і радіальні розтяги, їх зв'язок з відповідними похідними за                                                                                                                                                            | 8               | 2            | 2                 | 4                 |



|                                                                                                                                                      |            |           |           |           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|-----------|-----------|-----------|
| напрямком (з доведенням)                                                                                                                             |            |           |           |           |
| Тема 10. Обрахування похідних по $z$ і $\bar{z}$ спряженому від складної функції (без доведення)                                                     | 10         | 2         | 2         | 6         |
| Тема 11. Поняття про модуль сімей кривих. Модуль кільця                                                                                              | 8          | 2         | 2         | 4         |
| Тема 12. Модулі сім'ї кривих, що з'єднує протилежні сторони прямокутника                                                                             | 10         | 2         | 2         | 6         |
| Тема 13. Нерівність Полецького для квазіконформних відображень                                                                                       | 8          | 2         | 2         | 4         |
| Тема 14. Обернена нерівність Полецького. Відображення зі скінченим спотворенням і $Q$ -гомеоморфізми (на рівні означень). Підведення підсумків курсу | 10         | 2         | 2         | 6         |
| <b>Усього годин</b>                                                                                                                                  | <b>120</b> | <b>28</b> | <b>28</b> | <b>64</b> |

#### 4. Теми практичних занять

| № з/п | Назва теми                                                                                  | Кількість годин |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|
| 1     | Неперервність, відкритість і дискретність відображень. Гомеоморфні відображення             | 2               |
| 2     | Конформні і квазіконформні відображення                                                     | 2               |
| 3     | Обчислення головних чисел і векторів відображень. Обчислення норм і визначників відображень | 2               |
| 4     | Обчислення внутрішніх і зовнішніх дилатацій відображень                                     | 2               |
| 5     | Обчислення комплексних і максимальних дилатацій відображень на площині                      | 2               |
| 6     | Обчислення дилатацій радіальних відображень                                                 | 2               |
| 7     | Обчислення похідних складних функцій для відображень плоских областей                       | 2               |
| 8     | Відображення з розгалуженням. Закручування навколо осі                                      | 2               |
| 9     | Верхні оцінки модуля сімей кривих. Пошук допустимих функцій                                 | 2               |
| 10    | Нижні оцінки модуля сімей кривих та їх застосування                                         | 2               |
| 11    | Пряма і обернені нерівності типу Полецького. Пошук мажорант для конкретних відображень      | 2               |
| 12    | Відображення зі скінченим спотворенням і оцінки модуля при них                              | 2               |
| 13    | Нижні і кільцеві Q-гомеоморфізми                                                            | 2               |
| 14    | Узагальнююче заняття. Різні типи задач, повторення і закріплення                            | 2               |
|       | <b>Разом</b>                                                                                | <b>28</b>       |

#### 5. Теми для самостійної роботи

| № з/п | Назва теми                                                                                  | Кількість годин |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|
| 1     | Неперервність, відкритість і дискретність відображень. Гомеоморфні відображення             | 2               |
| 2     | Конформні і квазіконформні відображення                                                     | 2               |
| 3     | Обчислення головних чисел і векторів відображень. Обчислення норм і визначників відображень | 2               |
| 4     | Обчислення внутрішніх і зовнішніх дилатацій відображень                                     | 2               |
| 5     | Обчислення комплексних і максимальних дилатацій відображень на площині                      | 2               |
| 6     | Обчислення дилатацій радіальних відображень                                                 | 2               |
| 7     | Обчислення похідних складних функцій для відображень плоских областей                       | 2               |
| 8     | Відображення з розгалуженням. Закручування навколо осі                                      | 2               |
| 9     | Верхні оцінки модуля сімей кривих. Пошук допустимих функцій                                 | 2               |
| 10    | Нижні оцінки модуля сімей кривих та їх застосування                                         | 2               |
| 11    | Пряма і обернені нерівності типу Полецького. Пошук мажорант для конкретних відображень      | 2               |
| 12    | Відображення зі скінченим спотворенням і оцінки модуля при них                              | 2               |
| 13    | Нижні і кільцеві Q-гомеоморфізми                                                            | 2               |
| 14    | Узагальнююче заняття. Різні типи задач, повторення і закріплення                            | 2               |
|       | <b>Разом</b>                                                                                | <b>28</b>       |

## 6. Методи навчання

При викладанні навчальної дисципліни «Beltrami Equation: Geometric Approach» використовуються такі методи навчання: проблемно-пошуковий, пояснювально-ілюстративний, дослідницький, пошуковий, тощо. Освітній процес побудований на принципах особистісно орієнтованого навчання, на основі компетентнісного, системного, підходів що складає: проблемно-орієнтоване навчання; індивідуальні консультації фахівців Інституту прикладної математики і механіки НАН України, інших установ НАН України.

## 8. Методи контролю

**Використовуються наступні методи контролю:**

1. Поточний контроль знань:
  - усне опитування;
  - виконання практичних робіт;
  - тестування;
  - виконання дослідницьких завдань.
2. Підсумковий контроль знань (іспит):
  - підсумковий тест або екзаменаційні білети.

## 9. Критерії оцінювання результатів навчання

**Розподіл балів, які отримує аспірант**

| Аудиторна робота |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     | Самостійна<br>робота | Підсумковий<br>контроль (іспит) | Загальна кількість<br>отриманих балів |
|------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|----------------------|---------------------------------|---------------------------------------|
| теми             |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |                      |                                 |                                       |
| T1               | T2 | T3 | T4 | T5 | T6 | T7 | T8 | T9 | T10 | T11 | T12 | T13 | T14 |                      |                                 |                                       |
| 3                | 3  | 3  | 4  | 3  | 3  | 4  | 3  | 3  | 3   | 3   | 4   | 3   | 3   | 15                   | 40                              | 100                                   |

### Шкала оцінювання

| Сума балів за всі види навчальної діяльності | Оцінка за національною шкалою                                                                                                                                                                                              |
|----------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                              | для іспиту                                                                                                                                                                                                                 |
| <b>90-100</b>                                | «відмінно» - здобувач повно і всебічно розкриває питання теми, вільно оперує поняттями і термінологією, демонструє глибокі знання джерел, має власну точку зору стосовно відповідної теми і може аргументовано її доводити |
| <b>75-89</b>                                 | «добре» - загалом рівень знань здобувачів відповідає викладеному вище, але мають місце деякі упущення при виконанні завдань, обґрунтування неточні, не підтверджуються достатньо обґрунтованими доказами                   |
| <b>60-74</b>                                 | «задовільно» - здобувач розкрив питання, в загальних рисах, розуміє їх суть, намагається робити висновки, але при цьому припускається грубих помилок, матеріал викладає нелогічно і не самостійно                          |
| <b>35-59</b>                                 | «незадовільно» - з можливістю повторного складання, здобувач не в змозі дати відповідь на поставлене запитання або відповідь неправильна, не розуміє суті питання, не може зробити висновки                                |
| <b>0-34</b>                                  | «незадовільно» - з обов'язковим повторним вивченням дисципліни                                                                                                                                                             |

### 10. Орієнтовний перелік питань до підсумкового контролю (іспиту)

1. Поняття про класи Соболева (на рівні означень). Поняття про відображення, гомеоморфізм, приклади. Лінійні відображення
2. Головні числа и головні вектори. Норма і визначник відображення, їх зв'язок з головними числами
3. Означення і приклади квазіконформних відображень. Означення внутрішньої і зовнішньої дилатацій. Зв'язок дилатацій з головними числами (правила обрахування). Голоморфні функції як окремий випадок квазіконформних відображень
4. Відображення з обмеженим спотворенням. Відкриті та дискретні відображення
5. Означення комплексної і максимальної дилатацій. Доведення того, що максимальна дилатація голоморфного відображення дорівнює 1.
6. Геометричний сенс квазіконформності. Внутрішня і зовнішня дилатації як відношення об'ємів кулі та еліпсоїда (з доведенням).
7. Квазіконформні відображення на площині. Правило підрахунку норми похідної, якобіану і максимальної дилатації через похідні по  $z$  і  $\bar{z}$  спряжене
8. Радіальні відображення і правила обрахування дилатацій для них
9. Дотичні і радіальні розтяги, їх зв'язок з відповідними похідними за напрямком (з доведенням)

- 10.Обрахування похідних по  $z$  і  $\bar{z}$  спряженому від складної функції (без доведення)
- 11.Поняття про модуль сімей кривих. Модуль кільця
- 12.Модулі сім'ї кривих, що з'єднує протилежні сторони прямокутника
- 13.Нерівність Полецького для квазіконформних відображень
- 14.Обернена нерівність Полецького. Відображення зі скінченним спотворенням і  $Q$ -гомеоморфізми (на рівні означень). Підведення підсумків курсу
- 15.Неперервність, відкритість і дискретність відображень. Гомеоморфні відображення
- 16.Конформні і квазіконформні відображення
- 17.Обчислення головних чисел і векторів відображень. Обчислення норм і визначників відображень
- 18.Обчислення внутрішніх і зовнішніх дилатацій відображень
- 19.Обчислення комплексних і максимальних дилатацій відображень на площині
- 20.Обчислення дилатацій радіальних відображень
- 21.Обчислення похідних складних функцій для відображень плоских областей
- 22.Відображення з розгалуженням. Закручування навколо осі
- 23.Верхні оцінки модуля сімей кривих. Пошук допустимих функцій
- 24.Нижні оцінки модуля сімей кривих та їх застосування
- 25.Пряма і обернені нерівності типу Полецького. Пошук мажорант для конкретних відображень
- 26.Відображення зі скінченим спотворенням і оцінки модуля при них
- 27.Нижні і кільцеві  $Q$ -гомеоморфізми
- 28.Узагальнююче заняття. Різні типи задач, повторення і закріплення

## 12. Рекомендована література

### Основна література дисципліни

1. Альфорс Л. *Лекції з квазіконформного відображення*. – М: Мир, 1969.
2. Väisälä J. *Lectures on  $n$ -Dimensional Quasiconformal Mappings*. Lecture Notes in Math., V. 229. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 1971, 144 p.
3. Сичьов А.В. *Модулі та просторові квазіконформні відображення*. – Н.: Наука, 1983.
4. Решетняк Ю.Г. *Просторові відображення з обмеженим спотворенням*. – Н.: Наука, 1982.
5. Gehring F.W. *Quasiconformal mappings* // Complex Analysis and its Applications, V. 2. – Vienna: International Atomic Energy Agency, 1976. – P. 213-268.
6. Є.О. Севостьянов. *Модулі сімей кривих і квазіконформні відображення*. – Житомир: Вид-во ЖДУ імені Івана Франка, 2015.

### Допоміжна література дисципліни

1. Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. *Moduli in modern mapping theory*. –New York: Springer Science + Business Media, LLC, 2009.
2. Martio O., Rickman S., Väisälä J. *Definitions for quasiregular mappings* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. – 1969. – V. 448. – P. 1–40.
3. Martio O., Rickman S., Väisälä J. *Distortion and singularities of quasiregular mappings* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. –1970. – 465. – P. 1–13.
4. Rickman S. *Quasiregular mappings*. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 1993.
5. Севостьянов Є.О. *Дослідження просторових відображень геометричним методом*. – Київ: Наукова думка, 2014.