

Національна академія наук України
Інститут прикладної математики і механіки

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Святенко Ярослав Ігорович

УДК 531.36, 531.38

ДИСЕРТАЦІЯ

ПРО СТІЙКІСТЬ ОБЕРТАННЯ У СЕРЕДОВИЩІ З ОПОРОМ СИСТЕМИ ДВОХ ПРУЖНО ЗВ'ЯЗАНИХ ГІРОСКОПІВ ЛАГРАНЖА З ІДЕАЛЬНОЮ РІДИНОЮ

Спеціальність 113 Прикладна математика
Галузь знань 11 Математика та статистика

Подається на здобуття наукового
ступеня доктора філософії.

Дисертація містить результати власних досліджень.

Використання ідей, результатів і текстів інших
авторів мають посилання на відповідне джерело

_____ Я.І. Святенко

Науковий керівник **Кононов Юрій Микитович**,
доктор фізико-математичних наук, професор

ЧЕРКАСИ– 2023

АНОТАЦІЯ

Святенко Я.І. Про стійкість обертання у середовищі з опором системи двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа з ідеальною рідиною— Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 Прикладна математика (Галузь знань 11 Математика та статистика) – Інститут прикладної математики і механіки національної академії наук України, Черкаси, 2023.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню асимптотичної стійкості обертань у середовищі з опором невільної системи двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа та системи двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа з осесиметричними порожнинами, які повністю заповнені ідеальною нестисливою рідиною.

Наведений огляд сучасного стану досліджуваної у роботі проблеми свідчить про те, що широкі можливості практичного застосування результатів досліджень потребують аналітичного визначення основних властивостей обертання у середовищі з опором системи двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа та системи двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа з ідеальною рідиною, оскільки ця модель добре відображає властивості багатьох реальних механічних об'єктів.

Достовірність отриманих результатів підтверджується порівнянням з відомими у літературі результатами.

Виконані аналітичні дослідження показали досить високу ефективність отриманих умов стійкості.

Робота в цілому носить теоретичний характер, але наукове значення результатів та практична цінність роботи полягає в можливості їх застосування у роботі конструкторських бюро, науково-дослідних інститутів та підприємств, що займаються проектуванням і розрахунком механічних об'єктів, пов'язаних з обертанням у середовищі з опором систем твердих тіл та систем твердих тіл з рідиною в машинобудуванні, авіаційній та космічній техніці.

У вступній частині роботи представлено актуальність теми дослідження, визначено об'єкт та предмет дослідження, загально окреслено використані методи та

зв'язок роботи з науковими програмами, і темами. Сформульовано мету і перераховано задачі дослідження. Наведено наукову новизну отриманих результатів і практичне значення результатів дослідження, зокрема у розробці та конструюванні механічних об'єктів в ракетно-космічній техніці. Автором зазначено особистий внесок в спільних публікаціях - 6 статей в наукових журналах та 10 тез у працях міжнародних наукових конференцій. Перераховано наукові конференції на яких проводилася апробація результатів шляхом доповідей і обговорення досліджень.

У першому розділі наведено коротку історію вивчення питань, розглянутих в дисертації, а також відомі результати, що використовуються в дисертації. Наведений огляд сучасного стану розв'язання задач динаміки та стійкості обертання у середовищі з опором систем пружно зв'язаних твердих тіл та систем твердих тіл з рідиною свідчить про те, що ці задачі ще не вирішені й потребують подальших аналітичних та чисельних досліджень, оскільки вони мають не тільки теоретичний інтерес, а і велике практичне значення.

У другому розділі наведено постановку задачі про рух у середовищі з опором невіЛЬНОї системи двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа з нестисливою рідиною, а також на підставі рівнянь руху систем зв'язаних гіростатів П.В. Харламова виведені рівняння руху механічної системи, яка розглядається:

$$\begin{aligned}
 & (J_1 \cdot \omega_1 + \lambda_1)' + m_2 s_1 \times (\omega_1 \times s_1 + \omega_2 \times c_2)' = \\
 & = (m_1 c_1 + m_2 s_1) g \times v + L_1 - L_2 + M_{1q} + M_{1p} - D_1 \omega_1, \\
 & (J_2 \cdot \omega_2 + \lambda_2)' + m_2 c_2 \times (\omega_1 \times s_1 + \omega_2 \times c_2)' = \\
 & = m_2 c_2 g \times v + L_2 + M_{2q} + M_{2p} - D_2 \omega_2.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Тут $J_i = \text{diag}(A_i, A_i, C_i)$ – тензор інерції твердого тіла S_i^0 і рідини відносно точки O_i ;

$\lambda_i = \rho_i \int_{\tau_i} \mathbf{r}_i \times \mathbf{u}_i d\tau$ – гіростатичний момент; $\mathbf{u}_i$ – вектор відносної швидкості рідини в

порожнині τ_i ; точкою позначена абсолютна похідна; $s_1 = \overrightarrow{O_1 O_2}$; $c_i = \overrightarrow{O_i C_i}$; m_i і C_i – маса і центр мас тіла S_i .

До рівнянь (1) потрібно додати рівняння руху рідини у порожнині τ_i :

$$\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + (\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \mathbf{u}_i + 2\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{u}_i + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times \mathbf{r}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_i) + \dot{\mathbf{V}}_i = -\frac{1}{\rho_i} \nabla \tilde{P}_i - \nabla U + \nu_i \Delta \mathbf{u}_i, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_i = 0 \text{ в } \tau_i, \mathbf{u}_i = 0 \text{ (} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_i = 0 \text{ при } \nu_i = 0 \text{) на } \Sigma_i.$$

Де $\tilde{P}_i$ – тиск в порожнині τ_i ; U – потенціал масових сил (масові сили вважаються потенційним); $\dot{\mathbf{V}}_i$ – прискорення точки O_i ; Σ_i – границя області τ_i .

За допомогою функції стану С.Л. Соболева для ідеальної обертової рідини виведені рівняння збуреного руху у середовищі з опором системи двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа з довільними осесиметричними порожнинами, що містять ідеальну рідину:

$$A'_1 \ddot{\gamma}_1 + (i\tilde{C}_1 + D_1) \dot{\gamma}_1 + \mu \ddot{\gamma}_2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{1n} \dot{S}'_{1n} = (\tilde{a}_1 g - k_1 - k_2) \gamma_1, \\ A'_2 \ddot{\gamma}_2 + (i\tilde{C}_2 + D_2) \dot{\gamma}_2 + \mu \ddot{\gamma}_1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \dot{S}'_{2n} = (\tilde{a}_2 g - k_2) \gamma_2, \quad (3)$$

$$N_{in}^2 (\dot{S}_{in} - i\lambda_{in} S_{in}) + a_{in} \dot{\Omega}_i = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots, \infty; i=1, 2). \quad (4)$$

Тут $\lambda_{in} = 2\omega_{0i}/\kappa_{in}$, $N_{in}^2 = \int_{\tau_i} \mathbf{v}_{in}^2 d\tau$, комплексні власні векторні функції $\mathbf{v}_{in}$ та відповідні їм власні числа κ_{in} .

А відповідне характеристичне рівняння збуреного руху (3) із урахуванням основного тону коливання ідеальної рідини викладено у вигляді поліному 6-го ступеня:

$$a_6 \lambda^6 + (a_5 + ib_5) \lambda^5 + \dots + (a_1 + ib_1) \lambda + a_0 + ib_0 = 0. \quad (5)$$

Розглянуто різні випадки рівняння (5), а саме: випадок відсутності рідини в першому твердому тілі, у другому або у двох твердих тіл, випадок відсутності постійних моментів у інерційній або неінерційній системах відліку, випадок універсального пружного шарніру та випадок відсутності дисипації і постійних моментів. Здобуте характеристичне рівняння є точним для еліпсоїдальних і софокусно еліпсоїдальних порожнин і наближеними для всіх інших осесиметричних порожнин для уточнення яких слід враховувати додаткові тони коливання ідеальної рідини.

У третьому розділі на підставі характеристичного рівняння (5) у випадку відсутності рідини у двох твердих тіл і на основі критерія Льєнара-Шіпара, записаного у інформному вигляді отримані та аналітично досліджені умови асимптотичної стійкості рівномірних обертань у середовищі з опором системи двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа. Ці умови представлені у вигляді:

$$I_1 = |\Delta_1| = a_3 > 0, \quad (6)$$

$$I_3 = |\Delta_3| = \begin{vmatrix} a_4 & -b_3 & -a_2 \\ 0 & a_3 & -b_2 \\ a_3 & -b_2 & -a_1 \end{vmatrix} > 0, \quad (7)$$

$$I_5 = |\Delta_5| = \begin{vmatrix} a_4 & -b_3 & -a_2 & b_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & -b_3 & -a_2 & b_1 \\ 0 & 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 \\ 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 & b_0 \\ a_3 & -b_2 & -a_1 & b_0 & 0 \end{vmatrix} > 0, \quad (8)$$

$$I_7 = |\Delta_7| = \begin{vmatrix} a_4 & -b_3 & -a_2 & b_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & -b_3 & -a_2 & b_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & -b_3 & -a_2 & b_1 & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 & b_0 \\ 0 & 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 & b_0 & 0 \\ 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 & b_0 & 0 & 0 \\ a_3 & -b_1 & -a_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} > 0. \quad (9)$$

І на основі цих умов розглядається можливість стабілізації нестійкого обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа за допомогою другого гіроскопа у випадку відсутності постійних моментів в інерціальній системі ($P_1 = P_2 = 0$). А саме згідно з нерівностей (7)-(9) виписуються у наближенні достатньо великих значеннях кутової швидкості ω_{02} умови стабілізації:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 > \tilde{a}_1 g, \\ k_2 > \tilde{a}_2 g. \end{cases} \quad (10)$$

Також у цьому розділі досліджуються умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа на підвісі:

$$I_{32}\omega^2 + I_{31}\omega + I_{30} > 0, \quad I_{56}\omega^6 + I_{55}\omega^5 + \dots + I_{51}\omega + I_{50} > 0,$$

$$I_{78}\omega^8 + I_{77}\omega^7 + \dots + I_{71}\omega + I_{70} > 0, \quad (11)$$

$$\tilde{I}_{31}k_1 + \tilde{I}_{30} > 0, \quad \tilde{I}_{53}k_1^3 + \tilde{I}_{52}k_1^2 + \tilde{I}_{51}k_1 + \tilde{I}_{50} > 0, \quad \tilde{I}_{75}k_1^5 + \tilde{I}_{74}k_1^4 + \dots + \tilde{I}_{71}k_1 + \tilde{I}_{70} > 0. \quad (12)$$

$$\hat{I}_{31}k_2 + \hat{I}_{30} > 0, \quad \hat{I}_{53}k_2^3 + \hat{I}_{52}k_2^2 + \hat{I}_{51}k_2 + \hat{I}_{50} > 0, \quad \hat{I}_{76}k_2^6 + \hat{I}_{75}k_2^5 + \dots + \hat{I}_{71}k_2 + \hat{I}_{70} > 0. \quad (13)$$

Для перевірки отриманих умов асимптотичної стійкості був розглянутий відомий в літературі випадок відродження підвісу у струну. У цьому випадку ми маємо дві умови стійкості. Друга умова стійкості збіглася з відомою умовою, а перша умова у статті була пропущена. Усі отримані умови асимптотичної стійкості і необхідні умови стійкості при відсутності дисипації прості та зручні для проведення чисельних досліджень.

Отримані у третьому розділі умови стійкості та стабілізації порівнюються з аналогічними умовами за відсутності дисипації.

У четвертому розділі узагальнюються основні результати третього розділу на випадок двох гіроскопів Лагранжа, які містять довільну осесиметричну порожнину з ідеальною нестисливою рідиною. З урахуванням основного тону коливання ідеальної рідини отримані у вигляді системи п'яти нерівностей умови асимптотичної стійкості рівномірних обертань. Ці умови виписані відносно кінетичних моментів першого або другого гіроскопів, відносно кутових швидкостей гіроскопів, а також відносно коефіцієнтів пружності сферичних шарнірів. Розглянуті умови стійкості при різних випадках відсутності постійних моментів в інерційній та неінерційній системах відліку, при випадках виродження сферичних шарнірів у шарнір Гука. Розглянуто можливість стабілізації нестійкого обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною за допомогою другого гіроскопа, який обертається. Отримані достатні умови на коефіцієнти пружності шарнірів і перший тон коливання рідини у довільній осесиметричній порожнині при яких завжди буде можлива стабілізація при великих значеннях кутової швидкості другого гіроскопа. До достатніх умов, які були раніше отримані у третьому розділі додається умова на перший тон коливання рідини, він має бути більше одиниці. На прикладі еліпсоїдальної порожнини показано, що вона

повинна бути стиснута вздовж осі обертання. Отримані умови стабілізації порівнюються з аналогічними умовами за відсутності дисипації. Показано, що при відсутності дисипації еліпсоїдальна порожнина може бути не тільки стиснута але й витягнута. У цьому є принципова різниця в цих двох випадках. Розглянуто задачу про стійкість рівномірних обертань на підвісі гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною в середовищі з опором. Проведено аналітичні дослідження впливу рідини, пружності шарнірів, масових та інерційних характеристик підвісу на умови стійкості. Отримані умови порівнюються з умовами стійкості за відсутності дисипації.

Ключові слова: нелінійні звичайні диференціальні рівняння руху системи двох твердих тіл, пружність, підвіс, середовище з опором, гіроскопи Лагранжа, нелінійні диференціальні рівняння руху ідеальної нестисливої рідини, довільна осесиметрична порожнина, рівномірні обертання, лінеаризація, вільні коливання, крайова задача, власні функції і власні числа, спектральна задача, лічильна система звичайних диференціальних рівнянь, еліпсоїдальна порожнина, перший метод Ляпунова, асимптотична стійкість, стабілізація.

ABSTRACT

Ya.I. Sviatenko On the stability of rotation in a resistive medium of a system of two elastically connected Lagrangian gyroscopes with an ideal fluid.

Qualifying scientific work presented as a manuscript.

Thesis for the degree of Doctor of Philosophy in specialty 113 Applied Mathematics
Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of
Ukraine, Cherkasy, 2023.

The thesis is devoted to the study of the asymptotic stability of rotations in a medium with resistance of a non-free system of two elastically coupled Lagrangian gyroscopes and a system of two elastically coupled Lagrangian gyroscopes with axisymmetric cavities that are completely filled with an ideal incompressible fluid. The given review of the current state of the problem investigated in the work shows that the broad possibilities of practical application of research results require an analytical determination of the main properties of rotation in a medium with resistance of a system of two elastically coupled Lagrangian gyroscopes and a system of two elastically coupled Lagrangian gyroscopes with an ideal fluid. because this model well represents the properties of many real mechanical objects.

The reliability of the obtained results is confirmed by comparison with the results known in the literature.

The performed analytical studies showed a fairly high efficiency of the obtained stability conditions.

The work as a whole is of a theoretical nature, but the scientific significance of the results and the practical value of the work lies in the possibility of their application in the work of design bureaus, research institutes and enterprises engaged in the design and calculation of mechanical objects related to rotation in the series applications with the resistance of systems of solid bodies and systems of solid bodies with liquids in mechanical engineering, aviation and space engineering.

The introductory part of the work presents the relevance of the research topic, defines the object and subject of the research, generally outlines the methods used and the connection of the work with scientific programs and topics. The goal is formulated and the tasks of the research are listed. The scientific novelty of the obtained results and the practical

significance of the research results, in particular in the development and construction of mechanical objects in rocket and space technology, are presented. The author has indicated a personal contribution in joint publications - 6 articles in scientific journals and 10 theses in the proceedings of international scientific conferences. The scientific conferences at which the results were evaluated through reports and discussion of research were listed.

In the first chapter provides a brief history of the study of the issues discussed in the dissertation, as well as known results used in the dissertation. The given review of the current state of solving the problems of dynamics and stability of rotation in a medium with resistance of systems of elastically connected solid bodies and systems of solid bodies with liquid shows that these problems have not yet been solved and require further analytical and numerical studies, since they have not only theoretical interest, but also great practical importance.

In the second chapter, the formulation of the problem of motion in a medium with resistance of a non-free system of two elastically coupled Lagrangian gyroscopes with an incompressible fluid is presented, and based on the equations of motion of systems of coupled gyrostats by P.V. Kharlamov, the equations of motion of the mechanical system under consideration are derived:

$$\begin{aligned}
 & (J_1 \cdot \omega_1 + \lambda_1)' + m_2 s_1 \times (\omega_1 \times s_1 + \omega_2 \times c_2)' = \\
 & = (m_1 c_1 + m_2 s_1) g \times v + L_1 - L_2 + M_{1q} + M_{1p} - D_1 \omega_1, \\
 & (J_2 \cdot \omega_2 + \lambda_2)' + m_2 c_2 \times (\omega_1 \times s_1 + \omega_2 \times c_2)' = \\
 & = m_2 c_2 g \times v + L_2 + M_{2q} + M_{2p} - D_2 \omega_2.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Here $J_i = \text{diag}(A_i, A_i, C_i)$ – tensor of inertia of a rigid body S_i^0 and fluids relative to a point O_i ; $\lambda_i = \rho_i \int_{\tau_i} r_i \times u_i d\tau$ – gyrostatic moment; u_i – vector of the relative velocity of the fluid in the cavity τ_i ; absolute derivative is indicated by a dot; $s_1 = \overrightarrow{O_1 O_2}$; $c_i = \overrightarrow{O_i C_i}$; m_i i C_i – mass and center of mass of the body S_i .

To equations (1), you need to add the equation of the fluid movement equation in the cavity τ_i :

$$\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + (\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \mathbf{u}_i + 2\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{u}_i + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times \mathbf{r}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_i) + \dot{\mathbf{V}}_i = -\frac{1}{\rho_i} \nabla \tilde{P}_i - \nabla U + \nu_i \Delta \mathbf{u}_i, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_i = 0 \text{ в } \tau_i, \mathbf{u}_i = 0 \text{ (} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_i = 0 \text{ при } \nu_i = 0 \text{) на } \Sigma_i.$$

Where $\tilde{P}_i$ – pressure in the cavity τ_i ; U – the potential of mass forces (mass forces are considered potential); $\dot{\mathbf{V}}_i$ – point acceleration O_i ; Σ_i – the border of the region τ_i .

Using S.L. Sobolev's state function for an ideal rotating fluid, the equations of disturbed motion in a medium with resistance of a system of two elastically connected Lagrangian gyroscopes with arbitrary axisymmetric cavities containing an ideal fluid are derived:

$$\begin{aligned} A'_1 \ddot{\gamma}_1 + (i\tilde{C}_1 + D_1) \dot{\gamma}_1 + \mu \ddot{\gamma}_2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{1n} \dot{S}'_{1n} &= (\tilde{a}_1 g - k_1 - k_2) \gamma_1, \\ A'_2 \ddot{\gamma}_2 + (i\tilde{C}_2 + D_2) \dot{\gamma}_2 + \mu \ddot{\gamma}_1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \dot{S}'_{2n} &= (\tilde{a}_2 g - k_2) \gamma_2, \end{aligned} \quad (3)$$

$$N_{in}^2 (\dot{S}_{in} - i\lambda_{in} S_{in}) + a_{in} \dot{\Omega}_i = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots, \infty; i=1, 2). \quad (4)$$

Here $\lambda_{in} = 2\omega_{0i}/\kappa_{in}$, $N_{in}^2 = \int_{\tau_i} \mathbf{v}_{in}^2 d\tau$, complex eigenvector functions $\mathbf{v}_{in}$ and their corresponding eigenvalues κ_{in} .

And the corresponding characteristic equation of disturbed motion (3) taking into account the fundamental tone of oscillation of an ideal fluid is written as a polynomial of the 6th degree:

$$a_6 \lambda^6 + (a_5 + ib_5) \lambda^5 + \dots + (a_1 + ib_1) \lambda + a_0 + ib_0 = 0. \quad (5)$$

Different cases of equation (5) are considered, namely: the case of the absence of liquid in the first solid body, in the second or in two solid bodies, the case of the absence of constant moments in inertial or non-inertial frames of reference, the case of a universal elastic hinge, and the case of the absence of dissipation and constant moments. The obtained characteristic equation is accurate for ellipsoidal and sofoal-ellipsoidal cavities and approximate for all other axisymmetric cavities, for the clarification of which additional tones of oscillation of an ideal liquid should be taken into account.

In the third chapter, on the basis of the characteristic equation (5) in the case of the absence of liquid in two solid bodies and on the basis of the Lenard-Schipar criterion, written

in innor form, the conditions of the asymptotic stability of uniform rotations in a medium with the resistance of a system of two elastically connected connected Lagrange gyroscopes. These conditions are presented in the form:

$$I_1 = |\Delta_1| = a_3 > 0, \quad (6)$$

$$I_3 = |\Delta_3| = \begin{vmatrix} a_4 & -b_3 & -a_2 \\ 0 & a_3 & -b_2 \\ a_3 & -b_2 & -a_1 \end{vmatrix} > 0, \quad (7)$$

$$I_5 = |\Delta_5| = \begin{vmatrix} a_4 & -b_3 & -a_2 & b_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & -b_3 & -a_2 & b_1 \\ 0 & 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 \\ 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 & b_0 \\ a_3 & -b_2 & -a_1 & b_0 & 0 \end{vmatrix} > 0, \quad (8)$$

$$I_7 = |\Delta_7| = \begin{vmatrix} a_4 & -b_3 & -a_2 & b_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & -b_3 & -a_2 & b_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & -b_3 & -a_2 & b_1 & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 & b_0 \\ 0 & 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 & b_0 & 0 \\ 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 & b_0 & 0 & 0 \\ a_3 & -b_1 & -a_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} > 0. \quad (9)$$

And on the basis of these conditions, the possibility of stabilizing unstable rotation in an environment with resistance of the Lagrangian gyroscope with the help of a second gyroscope in the absence of constant moments in the inertial system is considered ($P_1 = P_2 = 0$). Namely, according to inequalities (7)-(9), the stabilization conditions are written in the approximation for sufficiently large values of the angular velocity ω_{02} :

$$\begin{cases} k_1 + k_2 > \tilde{a}_1 g, \\ k_2 > \tilde{a}_2 g. \end{cases} \quad (10)$$

Also in this section, the conditions of asymptotic stability of uniform rotation in a medium with resistance of a Lagrangian gyroscope on a suspension are investigated:

$$I_{32}\omega^2 + I_{31}\omega + I_{30} > 0, \quad I_{56}\omega^6 + I_{55}\omega^5 + \dots + I_{51}\omega + I_{50} > 0, \\ I_{78}\omega^8 + I_{77}\omega^7 + \dots + I_{71}\omega + I_{70} > 0, \quad (11)$$

$$\tilde{I}_{31}k_1 + \tilde{I}_{30} > 0, \tilde{I}_{53}k_1^3 + \tilde{I}_{52}k_1^2 + \tilde{I}_{51}k_1 + \tilde{I}_{50} > 0, \tilde{I}_{75}k_1^5 + \tilde{I}_{74}k_1^4 + \dots + \tilde{I}_{71}k_1 + \tilde{I}_{70} > 0. \quad (12)$$

$$\hat{I}_{31}k_2 + \hat{I}_{30} > 0, \hat{I}_{53}k_2^3 + \hat{I}_{52}k_2^2 + \hat{I}_{51}k_2 + \hat{I}_{50} > 0, \hat{I}_{76}k_2^6 + \hat{I}_{75}k_2^5 + \dots + \hat{I}_{71}k_2 + \hat{I}_{70} > 0. \quad (13)$$

To verify the obtained conditions of asymptotic stability, the well-known case of the revival of a suspension in a string was considered in the literature. In this case, we have two stability conditions. The second stability condition coincided with a known condition, and the first condition was omitted in the article. All obtained conditions of asymptotic stability and necessary conditions of stability in the absence of dissipation are simple and convenient for conducting numerical studies.

The stability and stabilization conditions obtained in the third section are compared with similar conditions in the absence of dissipation.

In the fourth chapter summarizes the main results of the third section for the case of two Lagrangian gyroscopes containing an arbitrary axisymmetric cavity with an ideal incompressible fluid. Taking into account the fundamental tone of oscillations of an ideal fluid, the conditions of asymptotic stability of uniform rotations are obtained in the form of a system of five inequalities. These conditions are written relative to the kinetic moments of the first or second gyroscopes, relative to the angular velocities of the gyroscopes, as well as relative to the coefficients of elasticity of the spherical joints. The conditions of stability in various cases of the absence of constant moments in inertial and non-inertial frames of reference, in cases of degeneration of spherical joints into Hook's joints are considered. The possibility of stabilization of unstable rotation in a medium with resistance of a Lagrangian gyroscope with an ideal fluid by means of a second rotating gyroscope is considered. Sufficient conditions for the coefficients of elasticity of the hinges and the first tone of fluid oscillation in an arbitrary axisymmetric cavity are obtained, under which stabilization will always be possible at large values of the angular velocity of the second gyroscope. To the sufficient conditions, which were previously obtained in the third section, a condition for the first tone of the liquid vibration is added, it must be greater than one. Using the example of an ellipsoidal cavity, it is shown that it must be compressed along the axis of rotation. The resulting stabilization conditions are compared with similar conditions in the absence of dissipation. It is shown that in the absence of dissipation, the ellipsoidal cavity can be not only compressed but also stretched. There is a fundamental difference in these two cases.

The problem of the stability of uniform rotations on the suspension of a Lagrangian gyroscope with an ideal fluid in a medium with resistance is considered. Analytical studies of the effect of fluid, elasticity of hinges, mass and inertial characteristics of the suspension on stability conditions were carried out. The obtained conditions are compared with stability conditions in the absence of dissipation.

Key words: nonlinear ordinary differential equations of motion of a system of two rigid bodies, elasticity, suspension, medium with resistance, Lagrangian gyroscopes, nonlinear differential equations of motion of an ideal incompressible fluid, arbitrary axisymmetric cavity, uniform rotations, linearization, free oscillations, boundary value problem, eigenfunctions and eigenvalues, spectral problem, calculus system of ordinary differential equations, ellipsoidal cavity, Lyapunov's first method, asymptotic stability, stabilization.

Список публікацій здобувача

Публікації у наукових виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз:

1. Kononov, Y.M., Svyatenko, Y.I.: Stabilization of unstable spinning of a Lagrange gyroscope in a resisting medium by another spinning gyroscope. *International Applied Mechanics* **58**, 605–612 (2022) DOI: 10.1007/s10778-023-01184-3

2. Kononov, Y.M., Svyatenko, Y.I.: Stabilization of a spinning Lagrange gyro-scope filled with ideal fluid in a resisting medium, *International Applied Mechanics* **59**, 207–217 (2023) DOI: 10.1007/s10778-023-01213-1

Публікації у фахових виданнях України:

3. Кононов, Ю.М., Святенко, Я.І.: О влиянии диссипативного и двух постоянных моментов на устойчивость равномерных вращений связанных гироскопов Лагранжа, *Вісник ДонНУ Сер.А Природничі науки* **1-2**, 4-12 (2019) DOI:10.31558/1817-2237.2019.1-2

4. Кононов, Ю.М., Святенко, Я.І.: Вплив дисипативного і постійного моментів на стійкість рівномірного обертання двох пружно зв'язаних вільних гіроскопів Лагранжа, *Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України* **33**, 132-141 (2019) DOI: 10.37069/1683-4720-2019-33-11

5. Kononov, Y.M., Sviatenko, Y.I.: On the subject of influence of dissipative and constant of moments on the stability of uniform rotations of non-free two elastically connected gyroscopes of Lagrange, *Proceedings of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics NAS of Ukraine* **34**, 50–61 (2020) DOI: 10.37069/1683-4720-2020-34-6

6. Святенко, Я.І.: Про стабілізацію нестійкого обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа за допомогою другого гіроскопа та пружних шарнірів, *Механіка та математичні методи* **3(2)**, 103-116 (2021) DOI: 10.31650/2618-0650-2021-3-2-103-116

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертаційної роботи:

7. Кононов Ю.Н., Святенко Я.И. О влиянии диссипативного и двух постоянных моментов на устойчивость равномерных вращений двух упруго связанных гироскопов Лагранжа. XIX Міжнародна конференція "Моделювання та дослідження стійкості динамічних систем" (DSMSI-2019). С. 94-95.

9. Кононов Ю.Н., Святенко Я.И. О влиянии диссипативного и постоянного моментов на устойчивость равномерных вращений двух упруго связанных волчков Лагранжа. VI Міжнародна конференція "Актуальні проблеми Інженерної механіки". Одеса, 2019. С. 144-147.

10. Кононов Ю.М., Святенко Я.І. Про стійкість рівномірних обертань в середовищі з опором двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа. Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2020", Львів, 2020.

<http://iapmm.lviv.ua/chyt2020/abstracts/Kononov.pdf>

11. Кононов Ю.М., Святенко Я.І. Про стабілізацію нестійкого обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа. XVI Міжнародна наукова конференція для молодих вчених “Сучасні проблеми математики та її застосування у природничих науках та інформаційних технологіях”. Харків, 2021. С.20-21.

11. Кононов Ю.М., Святенко Я.І. Про стабілізацію нестійкого обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа другим гіроскопом, який обертається. Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2021", Львів, 2021.

12. Кононов Ю.М., Святенко Я.І. Про стабілізацію нестійкого обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа за допомогою другого гіроскопа та пружних шарнірів. I Всеукраїнська науково-практична конференція “ Прикладні аспекти сучасних міждисциплінарних досліджень”, Вінниця, 2021. С.136-139.

13. Святенко Я., Кононов Ю. Про стабілізацію нестійкого обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною. Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2022", Львів, 2022.

<http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2022/abstracts/Sviatenko.pdf>

14. Кононов Ю.М., Святенко Я.І. Про стійкість обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа на підвісі. Міжнародна наукова конференція “Математичні проблеми технічної механіки – 2023” - Київ, Дніпро, Кам’янське 2023 – С.51-52.

15. Святенко Я.І., Кононов Ю.М. Про стійкість обертання гіроскопа Лагранжа на підвісі у середовищі з опором під дією постійного моменту. Міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми механіки та математики – 2023” -Львів. 2023 – С.73-74.

16. Кононов Ю.М., Святенко Я.І. Про стійкість обертання на підвісі гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною у середовищі з опором. Міжнародна наукова конференція “Актуальні проблеми механіки - 2023” – Київ, Дніпро, Львів, Харків 2023.

Зміст

ВСТУП.....	20
РОЗДІЛ І ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ І ОСНОВНИХ МЕТОДІВ ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІКИ ТА СТІЙКОСТІ ОБЕРТАННЯ ТВЕРДОГО ТІЛА ТА СИСТЕМИ ЗВ'ЯЗАНИХ ТВЕРДИХ ТІЛ З РІДИНОЮ	27
1.1 Динаміка та стійкість обертання твердого тіла з рідиною.....	27
1.1.1 Ідеальна рідина.....	27
1.1.2 В'язка рідина.....	31
1.2 Динаміка та стійкість обертань систем зв'язаних твердих тіл і твердих тіл з рідиною.....	32
1.2.1 Стабілізація нестійкого обертання твердого тіла і твердого тіла з рідиною твердими тілами, що обертаються	38
1.2.2 Стійкість обертань твердого тіла і твердого тіла з рідиною на підвісі	41
1.3 Методи визначення стійкості консервативних та неконсервативних динамічних систем.....	48
1.3.1 Критерій Рауса-Гурвіца та Льєнара-Шіпара.....	48
1.3.2 Критерій Льєнара-Шіпара записаного на підставі інваріантного підходу.....	50
1.4 Висновки до розділу 1.....	53
РОЗДІЛ 2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. ВИВІД ХАРАКТЕРИСТИЧНОГО РІВНЯННЯ ЗБУРЕНОГО ОБЕРТАННЯ У СЕРЕДОВИЩІ З ОПОРОМ НЕВІЛЬНОЇ СИСТЕМИ ДВОХ ПРУЖНО ЗВ'ЯЗАНИХ ГІРОСКОПІВ ЛАГРАНЖА З ІДЕАЛЬНОЮ РІДИНОЮ.....	54
2.1 Постановка задачі вивід основних рівнянь.....	54
2.2 Вивід рівнянь збурених рівномірних обертань у середовищі з опором системи двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа з ідеальною рідиною	57
2.3 Характеристичне рівняння збуреного руху з урахуванням основного тону коливання ідеальної рідини	60
2.3.1 Випадок відсутності рідини в першому твердому тілі ($\rho_1 = 0$), у другому ($\rho_2 = 0$) або у двох твердих тіл ($\rho_1 = \rho_2 = 0$)	62

2.3.2 Випадок відсутності постійних моментів у неінерційній системі відліку ($Q_1 = Q_2 = 0$).....	65
2.3.3 Випадок відсутності постійних моментів у інерційній системі відліку($P_1 = P_2 = 0$).....	66
2.3.4 Випадок універсального пружного шарніру (шарніру Гука) ($\omega_{01} = \omega_{02} = \omega$).....	67
2.4 Випадок відсутності дисипації ($D_{i1} = D_{i2} = D_{i3} = 0$) і постійних моментів ($P_1 = P_2 = Q_1 = Q_2 = 0$).....	69
2.5 Висновки до розділу 2.....	69
РОЗДІЛ 3 АСИМПТОТИЧНА СТІЙКІСТЬ РІВНОМІРНИХ ОБЕРТАНЬ У СЕРЕДОВИЩІ З ОПОРОМ СИСТЕМИ ДВОХ ПРУЖНО ЗВ'ЯЗАНИХ ГІРОСКОПІВ ЛАГРАНЖА.....	71
3.1 Умови асимптотичної стійкості рівномірних обертань у середовищі з опором системи двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа.....	71
3.2 Стабілізація нестійкого обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа за допомогою другого гіроскопа у випадку відсутності постійних моментів в інерціальній системі ($P_1 = P_2 = 0$)	73
3.2.1 Умови стабілізації за допомогою кінетичного моменту другого гіроскопу ($\tilde{C}_2 = C_2 \omega_{02}$)	74
3.2.2 Умови стабілізації відносно пружності усферичних шарнірів k_1 і k_2	74
3.2.3 Умови стабілізації при відсутності дисипативних і постійних моментів	75
3.3 Стійкість обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа на підвісі	78
3.3.1 Постановка задачі. Основні рівняння.....	79
3.3.2. Випадок відсутності дисипативних($D_{ij} = 0, i = 1, 2; j = 1, 3$) і постійних моментів ($P = Q = 0$).	84
3.4 Висновки до розділу 3.....	86

РОЗДІЛ 4 АСИМПТОТИЧНА СТІЙКІСТЬ РІВНОМІРНИХ ОБЕРТАНЬ У СЕРЕДОВИЩІ З ОПОРОМ СИСТЕМИ ДВОХ ПРУЖНО ЗВ'ЯЗАНИХ ГІРОСКОПІВ ЛАГРАНЖА З ІДЕАЛЬНОЮ РІДИНОЮ	88
4.1 Умови стійкості рівномірних обертань у середовищі з опором системи двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа з ідеальною рідиною.....	88
4.1.1 Умови стійкості відносно кінетичних моментів першого або другого гіроскопів ($\tilde{C}_i = C_i \omega_{0i}$), моментів інерції C_i і A_i' і кутових швидкостей ω_{0i}	91
4.1.2 Умови стійкості відносно коефіцієнтів пружності сферичних шарнірів k_1 і k_2 при $P_1 = P_2 = 0$	93
4.2 Стабілізація нестійкого обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною за допомогою другого гіроскопа, який знаходиться над ним при $P_1 = P_2 = 0$	94
4.2.1 Умови стабілізації за допомогою кінетичного моменту другого гіроскопу $\tilde{C}_2 = C_2 \omega_{02}$	97
4.2.2 Умови стабілізації відносно пружності сферичних шарнірів k_1 і k_2	97
4.2.3 Умови стабілізації при відсутності дисипативних і постійних моментів	99
4.3 Стійкість обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною на підвісі	101
4.3.1. Постановка задачі. Основні рівняння.....	103
4.3.2. Умови асимптотичної стійкості рівномірних обертань у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною на підвісі	107
4.3.3 Випадок відсутності дисипативних і постійних моментів.....	109
4.4 Висновки до розділу 4.....	111
ВИСНОВКИ	114
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	118
Додаток А:	134

ВСТУП

Дисертаційна робота присвячена дослідженню асимптотичної стійкості рівномірних обертань у середовищі з опором системи двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа та системи двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа з ідеальною рідиною. Обертання гіроскопів підтримуються постійними моментами, спрямованими вздовж їх осей симетрій та постійними моментами у інерційній системі відліку. Рівняння збуреного руху представлено у вигляді лінійної системи звичайних диференціальних рівнянь, а характеристичне рівняння зведено до трансцендентного рівняння. З урахування основного тону коливання ідеальної рідини виведено характеристичне рівняння шостого ступеня і на підставі критерія Ляпунова – Шварца в інваріантному вигляді отримано умови стійкості рівномірних обертань у вигляді системи п'яти нерівностей та проведено їх дослідження у випадках відсутності рідини в першому твердому тілі, у другому або у двох твердих тіл. Показана можливість стабілізації нестійкого рівномірного обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа і гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною за допомогою другого гіроскопа, який обертається. На прикладі стиснутої еліпсоїдальної порожнини показано, що при досить великій кутовій швидкості обертання другого гіроскопа стабілізація завжди буде можлива за допомогою збільшення коефіцієнтів пружності шарнірів. На підставі отриманих умов стійкості рівномірних обертань у середовищі з опором системи двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа з ідеальною рідиною розглянута задача стійкості рівномірних обертань гіроскопів Лагранжа і гіроскопів Лагранжа з ідеальною рідиною на підвісі. Отримані у роботі умови стійкості порівняні з аналогічними умовами за відсутності дисипації.

Актуальність теми. Теоретичні, чисельні та експериментальні дослідження обертання у середовищі з опором системи пружно зв'язаних твердих тіл та твердих тіл з рідиною обумовлені постійним розвитком і вдосконаленням різних галузей сучасної техніки: авіації і космонавтики, хімічного і енергетичного машинобудування. В останні роки ці задачі стали особливо актуальними у зв'язку з постійним розвитком і вдосконаленням об'єктів ракетно-космічної, авіаційної та іншої техніки.

Об'єктом дослідження є системи двох пружно зв'язаних динамічно-симетричних твердих тіл та динамічно-симетричних твердих тіл з ідеальною рідиною, які обертаються у середовищі з опором, а **предметом** дослідження – стійкість обертання цих механічних систем.

Методи дослідження. Проведені у роботі теоретичні дослідження ґрунтуються на основних теоремах теоретичної механіки, на рівняннях Ейлера руху ідеальної нестисливої рідини, яка обертається, на функції стану С.Л. Соболева та на теорії стійкості.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота починала виконуватися в аспірантурі Донецького національного університету імені Василя Стуса на кафедрі прикладної математики і її тематика була включена в наступні держбюджетні теми кафедри:

«Розробка методів дослідження міцності та стійкості тонкостінних конструкцій при дії різного виду статичних та динамічних навантажень», 2016–2018 роки, р/н 0116U002522;

«Розробка методів дослідження міцності та стійкості тонкостінних оболонок та пружних твердих тіл з рідиною при дії різного виду динамічних навантажень», 2019–2021 роки, р/н 0119U100042.

Дисертаційна робота була завершена в аспірантурі Інституту прикладної математики і механіки НАН України і її тематика була включена в тематику відділу теорії керуючих систем:

«Розробка математичних моделей та методів аналізу, синтезу та керування дискретними і неперервними динамічними системами», 2022–2026 роки, р/н 0122U000118;

«Конструктивні і якісні методи дослідження нелінійних крайових задач та їх застосування до задач механіки», науково-дослідна робота за конкурсом Науково-дослідних робіт молодих учених НАН України 2023-2024 рр., р/н 0123U103046;

Грант EFDS-FL2-08 від Європейської федерації академій природничих та гуманітарних наук (ALLEA), 2 лінія фінансування Європейського фонду для переміщених вчених (EFDS), 21.07.23 - 31.12.23;

Грант Фонду Саймонса № 1160640 (США) «Сучасні проблеми чистої та прикладної математики» за програмою «Президентські вибіркові гранти для підтримки України», 01.06.2023 - 31.05.2024.

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є аналітичні дослідження стійкості обертання у середовищі з опором системи двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа та системи двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа з порожнинами, які повністю заповнені ідеальною рідиною.

Основні задачі дослідження:

1. Виведення рівнянь збуреного обертання у середовищі з опором системи двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа та системи двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа з ідеальною рідиною .

2. Отримання умов стійкості рівномірних обертання у середовищі з опором системи двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа та системи двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа з ідеальною рідиною.

3. Вплив дисипації, рідини, постійних моментів, коефіцієнтів пружності шарнірів, масових та інерціальних параметрів механічної системи на умови асимптотичної стійкості.

4. Стабілізація нестійкого обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа та гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною за допомогою гіроскопа, що обертається.

5. Умови стійкості рівномірного обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа і гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною на підвісі.

Наукова новизна отриманих результатів.

1. Вперше розглянута задача про стійкість обертання у середовищі з опором системи двох пружно зв'язаних невільних гіроскопів Лагранжа з довільними осесиметричними порожнинами, повністю заповненими ідеальною нестисливою рідиною.

2. Виведено лічильну систему звичайних диференціальних рівнянь обурених рівномірних обертань у середовищі з опором системи двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа з рідиною та отримано трансцендентне характеристичне рівняння.

3. З урахування основного тону коливання ідеальної рідини отримано у вигляді системи п'яти нерівностей умови асимптотичної стійкості рівномірних обертань у середовищі з опором гіроскопів Лагранжа з рідиною.

4. Умови стійкості аналітично (якісно) досліджені на двох задачах: задача про можливість стабілізації нестійкого рівномірного гіроскопа Лагранжа та гіроскопа Лагранжа з рідиною за допомогою другого гіроскопа, який обертається і задача про стійкість рівномірних обертань на підвісі гіроскопа Лагранжа та гіроскопа Лагранжа з рідиною.

5. Отримані достатні умови на коефіцієнти пружності шарнірів і перший тон коливання рідини для яких завжди буде можлива стабілізація при великих значеннях кутової швидкості другого гіроскопа. Перший тон коливання рідини повинен бути більше одиниці.

6. На прикладі еліпсоїдальної порожнини показано, що вона повинна бути стиснута вздовж осі обертання.

7. Оцінено вплив дисипації, рідини, постійних моментів, коефіцієнтів пружності шарнірів та масових і інерційних характеристик підвісу на умови стійкості рівномірних обертань системи гіроскопа Лагранжа та гіроскопа Лагранжа з рідиною.

8. Проведено порівняння отриманих умов стабілізації з умовами стабілізації за відсутності дисипації і постійних моментів.

Проведені у роботі теоретичні дослідження ґрунтуються на основних теоремах теоретичної механіки, на рівняннях Ейлера руху ідеальної нестисливої рідини, яка обертається, на відомих рівняннях руху системи гіростатів П.В. Харламова, на функції стану С.Л.Соболева, на теорії стійкості та на критерії Ляпуна-Шіпара, записаного в інваріантному вигляді.

Практичне значення результатів дослідження.

Проведені в дисертаційній роботі наукові дослідження мають в цілому теоретичний характер, а отримані наукові результати можуть бути використані при розробці та конструюванні механічних об'єктів в ракетно-космічній техніці, а також в машинобудуванні. Слід зазначити, що отримані умови асимптотичної стійкості і необхідні

умови стійкості при відсутності дисипації прості та зручні для проведення чисельних досліджень.

Особистий внесок здобувача в спільних публікаціях. 6 статей в наукових журналах [24, 25, 98, 99, 100, 163] та 10 тез у працях міжнародних наукових конференцій. Праця [163] виконана самостійно.

Роботи [24, 25, 98, 99, 100] виконані в співавторстві з науковим керівником професором Ю.М. Кононовим, якому належить постановка задач, участь в обговоренні методів вирішення та отриманих результатів.

Особисто автору належать наступні наукові результати, які наведені в дисертаційній роботі і публікаціях:

- виведення рівнянь збуреного руху у середовищі з опором системи двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа та системи двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа з ідеальною рідиною;
- отримання умов стійкості рівномірних обертання у середовищі з опором системи двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа та системи двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа з ідеальною рідиною;
- оцінка впливу дисипації, рідини, постійних моментів, коефіцієнтів пружності шарнірів і масових та інерціальних параметрів механічної системи на умови стійкості;
- визначення умов стабілізації нестійкого обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа та гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною за допомогою гіроскопів, що обертаються;
- отримання умови стійкості рівномірного обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа та гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною на підвісі.

Апробація результатів. Результати, які представлені в дисертаційній роботі, доповідалися і обговорювалися на наступних наукових конференціях і семінарах:

Міжнародна наукова конференція “Актуальні проблеми механіки - 2023” “Про стійкість обертання на підвісі гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною у середовищі з опором.”

Міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми механіки та математики – 2023” “Про стійкість обертання гіроскопа Лагранжа на підвісі у середовищі з опором під дією постійного моменту.”

Міжнародна наукова конференція “Математичні проблеми технічної механіки – 2023” “Про стійкість обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа на підвісі.”

Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2022" “Про стабілізацію нестійкого обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною”.

I Всеукраїнська науково-практична конференція“ Прикладні аспекти сучасних міждисциплінарних досліджень ”– м. Вінниця 2021. “Про стабілізацію нестійкого обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа за допомогою другого гіроскопа та пружних шарнірів.”

Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2021" “Про стабілізацію нестійкого обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа другим гіроскопом, який обертається.”

XVI Міжнародна наукова конференція для молодих вчених “Сучасні проблеми математики та її застосування у природничих науках та інформаційних технологіях” м.Харків 2021. “Про стабілізацію нестійкого обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа.”

Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2020" “Про стійкість рівномірних обертань в середовищі з опором двох пружно зв’язаних гіроскопів Лагранжа.”

XIX Міжнародна конференція "Модельовання та дослідження стійкості динамічних систем" (DSMSI-2019) м.Київ. “О влиянии диссипативного и двух постоянных моментов на устойчивость равномерных вращений двух упруго связанных гироскопов Лагранжа.”

VI Міжнародна конференція "Актуальні проблеми Інженерної механіки"-м.Одеса 2019. “О влиянии диссипативного и постоянного моментов на устойчивость равномерных вращений двух упруго связанных волчков Лагранжа.”

У повному обсязі дисертація доповідалася та була схвалена на розширеному семінарі відділу теорії керуючих систем Інституту прикладної математики і механіки НАН України (6 грудня 2023 р.).

Публікації. Основні результати дисертації в повному обсязі опубліковані в 6 статтях, серед яких 2 статті [24, 25] у виданнях квартиля Q3, внесених до наукометричної бази Scopus, 4 статті [99, 98, 100, 163] у фахових журналах України і 10 тез у працях міжнародних конференцій.

Структура та обсяг роботи. Дисертаційна робота складається із анотації, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел з 188 найменувань. Загальний обсяг дисертації становить 136 сторінок, в тому числі 11 рисунків.

РОЗДІЛІ

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ І ОСНОВНИХ МЕТОДІВ ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІКИ ТА СТІЙКОСТІ ОБЕРТАННЯ ТВЕРДОГО ТІЛА ТА СИСТЕМИ ЗВ'ЯЗАНИХ ТВЕРДИХ ТІЛ З РІДИНОЮ

Задача про рух твердого тіла з порожнинами, що містять рідину, є однією із класичних задач у механіці. Початок дослідження цієї задачі було покладено М.В. Остроградським у роботі “Мемуар про поширення хвиль у циліндричному басейні”, яка була представлена ним у Паризькій Академії наук у 1826 р. та Стоксом 1842-1847рр. У своїх роботах [41, 42] Стокс висловив дуже важливу думку, що рух твердого тіла не зміниться, якщо замінити рідину еквівалентним твердим тілом. Після Стокса цією задачею займалися Гельмгольц (1860р.), Р.Ламб (1873р.), Нейман (1883р.) та багато інших.

1.1 Динаміка та стійкість обертання твердого тіла з рідиною

1.1.1 Ідеальна рідина

При дослідженні коливань ідеальної однорідної рідини, що обертається, знайшла велике використання функція стану, яка була введена С.Л. Соболевим. Функція стану є аналогом потенціалу швидкості для ідеальної рідини. Класична робота С.Л. Соболева (1943р.) [165, 166] та подальші її дослідження привели до створення нового напрямку в теорії диференціальних рівнянь, які не вирішені відносно похідної. Ці рівняння отримали в математичній літературі назву крайових задач типу Соболева. Функція стану використовувалася багатьма авторами для дослідження руху ідеальної рідини в порожнині твердого тіла, яке обертається [66, 68, 69, 147, 184, 185]. Ця функція також була застосована до коливань важкої ідеальної рідини, що частково заповнює порожнину, для дослідження нормальних коливань капілярної ідеальної рідини та багаточислової ідеальної рідини [115, 27]. В останні роки функція стану була застосована також для безперервно стратифікованої рідини [187].

Велика кількість досліджень стійкості обертання гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною була пов'язана з розглядом еліпсоїдальної порожнини, серед яких роботи: Кельвіна, Грінхілла, Ф.А. Слудського, Гафа [20], А. Пуанкаре, Бассета, С.Л.

Соболева [166], О.Ю. Ішлінського та М.Є. Темченка [82], В.В. Румянцева [153], С.В. Жака, Ф.Х. Цельмана [182], А.В. Карапетяна [88], А.П. Маркєєва [138], О.Я. Савченко [28, 29, 106, 108], А.О. Ігнатєєва [28, 29, 108], Р.С. Paries [36], С.М. Судакова [172], Ю.М. Кононова [112], О.Я. Савченко [154] та ін. Це зв'язано з тим, що тільки в еліпсоїдальній порожнині ідеальна рідина може здійснювати однорідно-вихровий рух, і цей рух описується звичайними диференціальними рівняннями. Повне завершення дослідження однорідно-вихрового руху рідини знайшов у докторській дисертації С.М. Судакова [172].

Задачею про обертання гіроскопа Лагранжа з циліндричною порожниною, повністю заповненою ідеальною рідиною, займалися: С.Л. Соболев [166], О.Ю. Ішлінський та М.Є. Темченко [82], В.М. Роговий [147], Л.В. Докучаєв, Р.В. Рвалов [68, 69], Ю.М. Кононов [102] та багато інших авторів.

Обертання гіроскопа Лагранжа з циліндричною порожниною, частково заповненою ідеальною рідиною, досліджувалися у роботі Г.С. Наріманова [142]. Надалі ці дослідження були продовжені у роботах К. Стюартсона [39], Б.А. Костандяна [117], Ж.В. Майлса [32, 33], Р.В. Рвалова [147], М.П. Дяченко [70], В.П. Куликова та В.О. Самсонова [122], Антоньєва Н.В. [52] та ін.

При дослідженні обертання твердого тіла з рідиною центральною проблемою є визначення гіростатичного моменту $\lambda = \rho \int_{\tau} \mathbf{r} \times \mathbf{v} d\tau$, де ρ – густина рідини, $\mathbf{r}$ – радіус-вектор, що відраховується від центру, пов'язаної з твердим тілом системи координат, $\mathbf{v}$ – відносна швидкість рідини в порожнини τ . Так, наприклад, у разі сильно в'язкої рідини ($Re_i \ll 1$) гіростатичний момент λ_i обчислюється за формулою

$$\lambda_i = -\rho_i P_i^{(1)} \dot{\omega}_i Re_i + \rho_i (P_i^{(2)} \ddot{\omega}_i + \omega_{0i} Q_i^{(2)} \dot{\omega}_i) Re_i^2 + o(Re_i^3).$$

Властивості тензорів $P_i^{(1)}$, $P_i^{(2)}$ і $Q_i^{(2)}$ описані в [115].

У роботах Р.В. Рвалова, В.М. Рогового [147] і Л.В. Докучаєва, В.М. Рогового [68, 69] отримано рівняння збуреного руху та досліджено необхідні умови стійкості рівномірного обертання твердого тіла з довільною порожниною, що повністю заповнена ідеальною рідиною. Це дослідження проведено на підставі лічильної системи

ЗДР, отриманих на підставі модального аналізу, коефіцієнти яких визначаються рішеннями відповідних крайових задач гідродинаміки, які не залежать від часу та параметрів обертального руху твердого тіла. Таке відокремлення часової координати від просторових координат дозволяє розглядати довільний збурений рух твердого тіла, а рішення крайових задач знаходити для порожнин довільної форми. Отримані крайові задачі мають щільний спектр власних значень, розташованих на додатних і від'ємних частинах дійсної осі. Наведено аналітичне рішення цих крайових задач для еліпсоїдальної, софокусно-еліпсоїдальної, циліндричної та конічної порожнин. Побудовані області нестійкості рівномірного обертання вільного твердого тіла з рідиною для еліпсоїдальної та циліндричної порожнин. Зроблено висновок про стійкість обертання твердого тіла відносно осі з найбільшим моментом інерції та слабкої нестійкості, крім головних областей сильної нестійкості при обертанні відносно осі найменшого моменту інерції. Показано, що у разі еліпсоїдальної порожнини та порожнини, утвореної софокусними еліпсоїдами обертання, з нескінченного спектру власних частот збуджується єдина гармоніка, а у разі циліндричних і конічних порожнин цих гармонік нескінченно багато. Слід зазначити гарний кількісний збіг теоретичних розрахунків з експериментальними даними В.Т. Десятова [64].

Зупинимось більш детально на методиці Л.В. Докучаєва, В.М. Рогового [68, 69] і Р.В. Рвалова, В.М. Рогового [147], яка буде використана в даній роботі.

Рівняння збуреного руху ідеальної рідини в порожнині τ з точністю до величин другого порядку малості зводяться до системи рівнянь [69, 147]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + 2\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{v} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r} &= -\nabla p, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0 \text{ в } \tau, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \big|_S &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Тут $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\Omega}$, $|\boldsymbol{\Omega}|$ – кутова швидкість твердого тіла в збуреному русі, яка є величиною першого порядку малості порівняно з $|\vec{\omega}_0|$.

Рівняння збуреного руху твердого тіла з рідиною мають вигляд [69, 147]

$$J\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times J\boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times J\boldsymbol{\Omega} + \rho \int_{\tau} \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}} d\tau + \rho \int_{\tau} \boldsymbol{\omega}_0 \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) d\tau = \mathbf{M}, \quad (1.2)$$

де J – тензор інерції твердого тіла і рідини відносно центру інерції системи.

Рівняння (1.1) і (1.2) разом з рівняннями руху центру інерції, кінематичними співвідношеннями і початковими умовами повністю описують динаміку твердого тіла з ідеальною рідиною.

Задача на власні функції φ_n і власні значення κ_n зводяться до наступної краєвої задачі

$$\Delta \varphi_n + (1 - \kappa_n^2) \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial z^2} = 0 \text{ в } \tau, (L \nabla \varphi_n) \mathbf{v} = 0 \text{ на } S. \quad (1.3)$$

Відомо [69], що задача (1.3) має злічену кількість власних функцій φ_n , які заповнюють всюди щільно область $\text{Re } \kappa_n = 0$, $|\kappa_n| \geq 1$. Комплексні вектор-функції $\mathbf{v}_n(x, y, z)$, які визначаються співвідношенням

$$\mathbf{v}_n = \frac{\chi_n}{2\omega_0(\chi_n^2 - 1)} L \nabla \varphi_n,$$

$$L \nabla \varphi_n = \chi_n \mathbf{e}_3 \times \nabla \varphi_n - i \nabla \varphi_n + i \chi_n^2 \mathbf{e}_3 (\mathbf{e}_3 \cdot \nabla \varphi_n), \quad \lambda_n = 2\omega_0 / \kappa_n,$$

ортогональні в області τ

$$\int_{\tau} \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{v}_m^* d\tau = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ N_n^2, & n = m, \end{cases},$$

де зірочкою позначено операцію комплексного спряження.

Рішення рівнянь (1.1) знаходиться у вигляді розкладання в ряд по власним функціям φ_n з коефіцієнтами s_n та $\mathbf{v}_n$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(x, y, z, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} s_n(t) \mathbf{v}_n(x, y, z), \\ p(x, y, z, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \varphi_n(x, y, z). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Підставивши (1.4) в (1.1) і (1.2) і застосувавши процедуру модального аналізу, отримаємо лічильну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\dot{s}_n - \lambda_n s_n + N_n^{-2} (\mathbf{a}_n^* \cdot \dot{\mathbf{\Omega}}) = 0, \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (1.5)$$

$$J\dot{\Omega} + \Omega \times J\omega_0 + \omega_0 \times J\Omega + \rho \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{a}_n \dot{s}_n + \omega_0 \times \mathbf{a}_n s_n) = \mathbf{M}. \quad (1.6)$$

тут

$$\mathbf{a}_n = \int_{\tau} \mathbf{r} \times \mathbf{v}_n d\tau, \quad N_n^2 = \int |\mathbf{v}_n|^2 d\tau. \quad (1.7)$$

Рівняння (1.5) і (1.6) після додавання до них початкових умов повністю визначають динаміку твердого тіла з ідеальною рідиною.

Таким чином, задача динаміки твердого тіла з порожниною, яка повністю заповнена ідеальною рідиною, розбивається на дві частини, які можуть виконуватися незалежно. Перша (гідродинамічна) частина задачі зводиться до розв'язання крайової задачі (1.3) і залежить тільки від геометрії порожнини та не залежить від руху твердого тіла [69, 147]. Друга (динамічна частина) задачі зводиться до розв'язання задачі Коші для зліченої системи звичайних лінійних диференціальних рівнянь (1.5) – (1.6).

Якщо вісь обертання системи в незбуреному русі є одночасно віссю масової та геометричної симетрії твердого тіла та порожнини, то рівняння (1.5) та (1.6) значно спрощуються. В цьому випадку гіростатичний момент відносно осі симетрії дорівнює нулю і скалярне рівняння руху навколо цієї осі відокремлюється від інших, а рівняння обертання тіла відносно поперечних осей ідентичні [69, 147]:

$$\lambda = \rho \int_{\tau} \mathbf{r} \times \mathbf{v} d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(t) \mathbf{a}_n, \quad (1.8)$$

$$N_n^2 (\dot{s}_n - i\omega_0 \lambda_n s_n) + a_n \dot{\Omega} = 0, \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (1.9)$$

$$A\dot{\Omega} + i(C - A)\omega_0 \Omega + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\dot{s}_n - i\omega_0 s_n) = M, \quad (1.10)$$

де $\mathbf{a}_n = (a_n, ia_{in}, 0)$; A, C – головні моменти інерції системи відносно осей Ox і Oy відповідно; $\Omega = \Omega_1 - i\Omega_2$, $M = M_1 - iM_2$.

1.1.2 В'язка рідина

Задача про рух твердого тіла з порожниною, повністю заповненою малов'язкою або сильнов'язкою рідиною, вирішена в лінійній постановці Ф.Л. Чорноусько [184, 185]. Він досліджував малі гармонійні коливання твердого тіла з ідеальною рідиною (без обмеження на форму порожнини) на околі рівномірного обертання всієї системи

як одного твердого тіла, ввів у розгляд рішення трьох крайових, що переходять при $\omega_0 = 0$ у потенціали Жуковського. Для випадку вільного руху твердого тіла отримав і досліджував характеристичне рівняння. При цьому передбачалося, що власні рухи рідини в порожнині тіла, що обертається, затухли і розглядалися лише вимушені рухи рідини.

У випадку великої в'язкості рідини Ф.Л. Чорноусько запропонував загальний підхід до вивчення руху тіл з рідиною великої в'язкості, що спирається на математичні дослідження О.А. Ладиженської. Суть цього підходу з фізичної точки зору полягає в тому, що за рахунок великої в'язкості рідина сильно захоплює рух стінок порожнини і початковий розподіл швидкостей у рідині швидко стає несуттєвим [185]. При подальшому русі розподіл швидкостей у рідкій ємності стає близьким до розподілу швидкостей у несучому тілі, відрізняючись від останнього на малу величину.

Динаміка в'язкої рідини в порожнині твердих тіл, що обертаються, розглянута в роботах К. Стюартсона і П. Робертса [40], Х. Грінспена [18], Н.В. Дерендяєва і В.М. Сандалова [63], В. Оберкампа і В. Волфа [43], Т. Герберта [19] та інших. У цих роботах рух твердих тіл вважається заданим: це рівномірне обертання, або кругова прецесія, або регулярна прецесія.

Задача про рух в'язкої рідини, що повністю заповнює циліндричну посудину, розглянута в роботах [28, 46], численно вона вирішена в [46]. В [28] аналітично описано поле швидкостей відносного руху рідини для лінеаризованої задачі, і обчислений момент в'язких сил, що діють на циліндр з боку рідини. У вивченні руху тіла з рідиною довільної в'язкості досягнуто певних успіхів, які пов'язані, в основному, із застосуванням і розвитком прямого методу Ляпунова і стосуються вивчення їх стійкості [140]

1.2 Динаміка та стійкість обертань систем зв'язаних твердих тіл і твердих тіл з рідиною

Побудова та дослідження рівнянь руху СЗТТР (систем зв'язаних твердих тіл з рідиною) є актуальним завданням сучасної механіки. Багато об'єктів сучасної ракетно-космічної, авіаційної, морської, залізничної техніки з достатньою для практики точністю можуть бути представлені в рамках моделі СЗТТР [67, 132, 28, 34, 35].

У роботах С.Л. Соболева [165], О.Ю. Ішлінського та М.Е. Темченко [82], К. Стюартсона [39] та ін. отримані необхідні умови стійкості дзиги Лагранжа з еліпсоїдальної та циліндричної порожниною у разі вихрового руху ідеальної рідини. Як показано в цих роботах, виявлено якісно нове явище - нестійкість обертання тіла відносно поперечної осі при вихровому русі ідеальної рідини, яка повністю заповнює осесиметричну порожнину. Однак дослідження ЗДР руху проводилося одночасно з рішенням рівнянь у частинних похідних, що дуже ускладнювало дослідження. У зв'язку з цим, незважаючи на велику кількість робіт, досить повно проаналізовано лише випадок еліпсоїдальної порожнини.

Ряд задач з динаміки твердого тіла та стійкості їх руху наведено у збірнику В.В. Румянцева [151]. У нього включені роботи з стійкості рухів крила в нестационарному потоці, по визначенню реакцій в динаміці систем, які стиснені зв'язками, по динаміці тіла в рідині за наявності твердих границь. Також вивчаються умови стійкості точок лібрації (відносних рівноваг) в задачі трьох тіл під впливом сил різної природи, різні питання динаміки та стійкості важкого твердого тіла (з нерухомою точкою, на шорсткій площині, на стрижні) та гіростату на площині з тертям, розглядаються прикладні задачі динаміки тіл із рідким наповненням.

Задача про рух СПЗТТ (систем пружно зв'язаних твердих тіл з рідиною) є подальшим узагальненням задачі про рух твердого тіла. СПЗТТ займає проміжне положення між твердим та пружним тілом.

У СЗТТ зазвичай виділяють одне основне тверде тіло (як правило найбільш масивне). А.І. Лур'є [134] назвав таке тіло носієм системи, а решта твердих тіл - носимими.

Представлення літального апарату (ЛА) у вигляді СПЗТТ дозволяє використовувати відносні переміщення носимих твердих тіл, з метою управління рухом носія, в основному його обертального руху в просторі. Носій СПЗТТ має набагато більшу різноманітність рухів у порівнянні з рухом цього ж носія як одного твердого тіла. У системі твердих тіл можуть виникати досить складні та різноманітні рухи, включаючи майже періодичні резонанси [132].

Рух СПЗТТ описуються кінцевим числом нелінійних ЗДР. У зв'язку з цим СПЗТТ набуває все більшого прикладного значення як модель керованої механічної системи і все більшого теоретичного значення, тому що в такій системі виникають коливання досить складного виду.

Подальше удосконалення видів рівнянь руху СЗТТ виконав П.В. Харламов [180]. Він переніс на СЗТТ зауваження А.І. Лур'є про те, що залежність від вибору системи координат рівняння руху твердого тіла можуть мати різну форму. Ним отримані рівняння руху СЗТТ досить загального виду, які дуже зручні для об'єднання твердих тіл у групи різними способами і виявлення можливостей інтегрування цих рівнянь. Рівняння П.В. Харламова знайшли велике застосування та розвиток у сучасній механіці, у тому числі, у працях донецької школи механіків, заснованої П.В. Харламовим [132].

У монографії О.Я. Савченко, І.А. Болграбської, Г.А. Кононихіна [156] наведено рівняння руху СЗТТ та СПЗТТ досить загального виду. Знайдено умови існування найбільш важливих для практики класів рухів: рівномірних обертань, регулярних і напіврегулярних прецесій та ін.

У роботах [55, 56, 156] вивчено стійкість рівномірних обертань вільної зв'язки n гіроскопів Лагранжа, досліджено стійкість руху вільної системи двох твердих тіл, що зв'язані універсальним пружним шарніром в середовищі з опором, оцінено вплив малої несиметрії на стійкість руху СПЗТТ.

Г.А. Кононихін [113, 158] отримав і досліджував необхідні та достатні умови рівномірних обертань та регулярних прецесій системи n важких гіроскопів Лагранжа.

Модель СЗТТ використовували при описі динаміки космічних апаратів Й. Віттенбург [45], В.В. Крементуло [119, 120] та багато інших. Й. Віттенбург [45] розглянув модель супутника, як системи n твердих тіл і гіростатів, які зв'язані сферичними шарнірами. На основі чисельного інтегрування рівнянь руху цієї системи він визначив стійкі відносні положення рівноваги системи.

Розглянуті методи та прийоми дослідження динаміки СЗТТ, з урахуванням рівнянь руху рідини, використані при виведенні та дослідженні рівнянь руху СПЗТТР. У роботах Ю.М. Кононова [103, 105] виведені рівняння руху СПЗТТР, в основу яких

покладено відомі рівняння руху n гіростатів, П.В. Харламовим [180], і рівняння руху ідеальної рідини, що обертається Р.В. Рвалова, В.М. Рогового [147] та Р.В. Рвалова, Л.В. Докучаєва [67, 68, 69, 147].

В роботі [89] розглядається задача про рух трьох зв'язаних твердих тіл в однорідно гравітаційному полі (узагальнена задача на рух гіроскопа в кардановому підвісі). Знайдено всі стаціонарні рухи системи, умови їх стійкості та розгалуження. На основі наведеного аналізу показано, що повний атлас біфуркаційних діаграм Смейла для цієї задачі складається з 24 карт, які різняться видом цих діаграм.

В роботі [125] знайдено всі стаціонарні режими руху динамічно симетричного твердого важкого тіла з нерухомою точкою під дією постійних і дисипативного моментів, досліджено його стійкість. Показано, що додаткові сили можуть дати як стабілізуючий, так і дестабілізуючий вплив на стійкість стаціонарних рухів тіла. Отримано та проаналізовано умови стійкості вертикальних обертань тіла на стержні або на струні під дією дисипативного та постійного чи крутильного моментів. Проведено порівняння отриманих результатів із результатами у випадку відсутності дисипативного та постійного моментів.

В статті [101] було зроблено припущення, що центр мас несиметричного твердого тіла знаходиться на третій головній осі інерції твердого тіла, і на основі критерію Льєнара–Шіпара, записаного в іннормному вигляді, отримано системи трьох нерівностей, а саме умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання динамічно несиметричного важкого твердого тіла з нерухомою точкою. Тверде тіло знаходиться під дією сил тяжіння, дисипативного моменту і постійних моментів в інерціальній та у неінерціальній системах відліку. Розглянуто випадки відсутності динамічної або дисипативної несиметрії, а також випадки відсутності одного із постійних моментів. Показано, що положення рівноваги буде стійким тільки при дії відновлювального моменту та за умови рівності постійних моментів або їх відсутності, а також показано, що динамічна несиметрія більш суттєво впливає на стійкість обертання несиметричного твердого тіла, ніж дисипативна несиметрія.

У роботі [143] розглянуто завдання про рух несиметричного твердого тіла відносно центру мас в середовищі з опором. Надається якісний опис фазових траєкторій, наводяться їх деякі характеристики та кількісні оцінки.

В статті [144] розглянуто задачу про оцінку власних значень і стійкості лінійної механічної системи, що перебуває під дією потенціальних, гіроскопічних, дисипативних і циркуляційних сил. Описано можливі варіанти, коли спектр системи лежить в лівій півплощині – виконується критерій Рауса–Гурвіца, але згасання збурених рухів відбувається “надто повільно”. Як приклад розглянуто задачу про рівномірні обертання важкого твердого тіла під дією демпфуючого моменту.

У роботах [144, 146] були отримані і проаналізовані умови асимптотичної стійкості рівномірних обертань несиметричного важкого твердого тіла, що перебуває під дією демпфуючого моменту, навколо осі, яка несе центр мас, у випадку, коли центр мас перебуває вище точки опори. В статті [145] розглядається задача стійкості в критичному за Ляпуновим випадку, коли характеристичне рівняння має пару чисто уявних коренів. Показано, що в цьому випадку може спостерігатись як асимптотична стійкість, так і нестійкість.

У дев'ятому томі серії “Задачі і методи: математика, механіка, кібернетика” [58] представлено дослідження з динаміки систем зв'язаних твердих тіл. З єдиних позицій викладено підхід щодо задач про рух систем твердих тіл. Розглянуто моделі, які припускають різні зчленування тіл та їх загальний просторовий рух. У досить загальному вигляді отримано рівняння руху введених систем. Подано обґрунтування використання системи твердих тіл, зв'язаних пружними шарнірами, для моделювання стержневих об'єктів. Одержано рівняння руху гіросфери – чутливого елемента гірокомпаса з урахуванням динамічних та статичних дебалансів. Наведено нову постановку задачі про рух тіла на підвісі. Знайдено нові точні розв'язки в задачі про рух систем тіл. Вивчено умови існування стаціонарних режимів руху системи та їх стійкість. Наведено метод дослідження стійкості механічних систем, що мають несиметрію різної фізичної природи. Запропоновано конструктивний алгоритм визначення резонансних частот, в околі яких рух систем з малою несиметрією нестійкий.

У монографії [156] наведено рівняння руху систем зв'язаних твердих тіл досить загального виду. Знайдено умови існування найважливіших для практики класів рухів: рівномірних обертань, регулярних та напіврегулярних прецесій та інших рухів. Отримано необхідні та достатні умови стійкості цих рухів, а також вивчено вплив пружних властивостей елементів системи на стійкість зазначених рішень. Розроблено метод дослідження стійкості механічних систем, що мають несиметрію різної фізичної природи. Побудовано конструктивний алгоритм визначення резонансних частот, в околиці яких при появі в системі малої симетрії виникає інтервал експоненційної нестійкості.

У книзі [133] обговорюється задача про рух твердого тіла в середовищі з опором з позиції теоретичної механіки. Проводиться послідовне ускладнення постановки завдання як зі збагаченням моделі впливу середовища, так і підвищенням порядку динамічної системи. Такий підхід дозволяє застосувати єдині методи якісного аналізу: пошук рухів, дослідження біфуркації і стійкості, виявлення глобальних властивостей фазових траєкторій системи.

У статтях [49, 50, 51, 130] розглядається швидкий рух навколо нерухомої точки несиметричного важкого твердого тіла в опірному середовищі. Рух тіла складається з руху Ейлера-Пуансо навколо вектора кінетичного моменту з повільно спадаючими величинами кінетичного моменту і кінетичної енергії, і руху самого вектора кінетичного моменту. Зміна кінетичної енергії та модуля кінетичного моменту залежить тільки від опору середовища. Кутова швидкість обертання вектора кінетичного моменту залежить від дії сили тяжіння та сили опору середовища. В результаті застосування методу усереднення виходить автономне рівняння квадрата модуля еліптичних функцій, що описує рух кінця вектора кінетичного моменту на сфері радіуса. Аналіз цього рівняння дозволяє знайти квазістаціонарні рухи, в яких рух загалом затухає (кінетичний момент і кінетична енергія прагнуть до нуля), але характер руху тіла навколо вектора кінетичного моменту залишається незмінним.

У статтях [53, 57, 73, 129] розглядається рух динамічно несиметричного супутника щодо центру мас під дією гравітаційного та світлового моментів у середовищі з опором.

1.2.1 Стабілізація нестійкого обертання твердого тіла і твердого тіла з рідиною твердими тілами, що обертаються

На XIII Міжнародному конгресі з теоретичної та прикладної механіки (1972р.) О.Ю. Ішлінським поставлено задача визначення умов стійкості рівномірних обертань системи двох важких гіроскопів Лагранжа [78, 21]. О.Я. Савченко на основі рівнянь П.В. Харламова [180] та їх перших інтегралів методом Четаєва отримав достатні умови стійкості [158]. Із аналізу цих умов випливає, що обидва гіроскопи повинні обертатися в незбуреному русі в той самий бік і для кожного з гіроскопів повинна виконуватися нерівність, яка близька до нерівності Майєвського. Необхідні умови стійкості були отримані ще в 1898 і наведені в монографії А.І. Лур'є [134].

При дослідженні необхідних і достатніх умов стійкості О.Я. Савченко виявив цікавий ефект стабілізації невірноваженого гіроскопа Лагранжа, що покоїться, другим обертотом [158]. Ця задача стабілізації також розглядалося М.Е. Лесіною [127]. В роботі А.М. Ковальова показана можливість стабілізації невірноваженого гіроскопа за допомогою маховика, що обертається. О.Я. Савченко та його учнями були продовжені дослідження ефекту стабілізації та отримані нові результати [59, 94, 95], [156, 155, 157, 160, 161, 162].

Найбільш відомими серед робіт з питань стабілізації є такі: В.В. Румянцева [151, 152], В.В. Крементуло [119, 120], В.А. Самсонова та А. Давидовського [61], О.Я. Савченко та Ю.П. Вархальова [59], А.А. Карапетяна [86], М.Е. Лесіної [127], С.П. Сосницького [167], Н.В. Коваленко [94, 95], Н.В. Світличної [160, 161], С.А. Агафоновой [48], Г.Г. Денісова та В.В. Новікова [62], Н.М. Качуріної [93], Г.Б. Філімоніхіна [179], А. El-Gohary [14, 15], К. Peiffer [37] та ін.

Вивченню питань стабілізації стаціонарних рухів вільного твердого тіла за допомогою маховиків присвячена монографія В.В. Крементуло [119, 120] в якій на основі аналітичної теорії управління рухом досліджується проблема оптимальної стабілізації положень рівноваги та перманентних обертань вільного та невольного твердих тіл за допомогою керованих обертотів мас (гіроскопів, маховиків) при більш загальних припущеннях (довільне положення точки підвісу гіроскопа на тілі, відсутність карданова підвісу, наявність невірноваженості гіроскопа). Тут також дано рішення

задачі стабілізації деяких обертальних рухів твердого тіла в центральному ньютонівському полі сил, показано можливість стабілізації обертального руху твердого тіла за допомогою двоступеневого гіроскопа і маховика.

У роботі М.Е. Лесіної [127] вивчена область допустимих значень деяких параметрів, що характеризують систему гіроскопів, при яких невірноважений верхній гіроскоп, що покоїться, стабілізується нижнім, що обертається. Однак ці параметри досить складно залежать від основних характеристик системи (моментів інерції тіл, координат їх центрів мас) і тому не дозволяють оцінити, при яких значеннях даних характеристик настає ефект стабілізації, також залишилося відкритим питання про стабілізацію нижнього гіроскопа, що покоїться, обертовим верхнім.

У статті Ю.П. Вархальова, О.Я. Савченко та Н.В. Світличної [59] побудована область допустимих значень основних параметрів (екваторіальних моментів інерції гіроскопів), при яких існує як ефект стабілізації верхнього нижнім, так і нижнього верхнім. Показано, як за заданими параметрами гіроскопа, що покоїться, вибрати параметри другого, що стабілізує перший.

Задача стабілізації механічної системи з одними лише неконсервативними позиційними силами за рахунок приєднання гіроскопічних сил розглядається у статті А.А. Косова [116]. Доведено, що при виродженій матриці неконсервативних сил і парному числі координат гіроскопічна стабілізація завжди можлива. При невиродженій матриці неконсервативних сил встановлено можливість гіроскопічної стабілізації всіх систем з числом координат, кратним чотирьом. Для системи з неконсервативними позиційними силами та дисипативними силами з повною дисипацією отримані достатні умови стабілізації до експоненційної стійкості за рахунок приєднання гіроскопічних сил.

У роботі С.А. Агафонові, А.Д. Герман [48] вирішується задача стабілізації стаціонарного руху динамічно симетричного супутника-гіростата за допомогою докладавання зовнішніх моментів. Центр мас супутника рухається круговою орбітою. Задача вирішується у строгій нелінійній постановці. У фазовому просторі знаходиться оцінка області тяжіння стаціонарного руху, що виражена в термінах самої системи. Для

вирішення поставленої задачі застосовується теорема про стійкість механічної системи під дією дисипативних, гіроскопічних, потенційних, а також неконсервативних позиційних сил.

У статті Awad El-Gohary [15] розглянуто механічну систему, що складається з твердого тіла та трьох роторів, осі обертання яких спрямовані вздовж головних осей інерції системи. Рівняння руху допускають часне рішення, що представляє обертання системи з постійною кутовою швидкістю навколо деякої осі. Розв'язано задачу про оптимальну стабілізацію цього руху за допомогою докладання до осей роторів керуючих моментів, а в [14] управління обертальним рухом твердого тіла здійснюється за допомогою трьох роторів, встановлених по головних осях інерції тіла. Доведено асимптотичну стійкість методом Ляпунова. Розглянуто окремий випадок рівноваги твердого тіла, коли його головні осі інерції збігаються з осями інерційної системи координат. Визначено керуючі моменти, що стабілізують обертальний рух та рівновагу твердого тіла.

У роботі О.В. Карапетяна [86] розглядається задача гіроскопічної стабілізації за умови, що елементи матриці гіроскопічних сил є незалежними симетричними бернуллієвськими випадковими величинами.

Поряд із дослідженням питань стійкості обертання систем твердих тіл з рідиною виникла задача стабілізації нестійкого обертання твердих тіл з порожнинами, що містять рідину.

У праці Ю.М. Кононова [102] показана можливість стабілізації обертання дзиги з рідиною шляхом введення в порожнину безмасових поперечних і коаксіальних перегородок. Однак на практиці це не завжди може бути здійснено.

У статті [47] наводиться вирішення двох задач стабілізації стаціонарного руху неврівноваженого гіроскопа в кардановому підвісі. У першій задачі стабілізація здійснюється за допомогою зовнішнього неконсервативного моменту, що залежить від кутів повороту кілець і прикладається до осей підвісу. За допомогою побудови функції Ляпунова отримано умову стабілізації до асимптотичної стійкості стаціонарного руху та дається оцінка області тяжіння. У другій задачі стабілізація здійснюється за

допомогою параметричного збудження, яке реалізується за допомогою вібрації основи вздовж вертикалі за досить загальним законом. Знайдено умову стабілізації стаціонарного руху, виражену через інтегральні характеристики параметричного збудження.

У роботах [106, 104, 23] розглянуто задачу про стабілізацію нестійкого обертання твердого тіла з рідиною другим твердим тілом, що обертається. У цій дисертаційній роботі використана методика цих досліджень для задачі про стабілізацію нестійкого обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною.

Незважаючи на велику кількість робіт, присвячених стійкості та стабілізації руху твердих тіл з рідким наповненням, до теперішнього часу недостатньо досліджена задача про стійкість і стабілізацію обертання у середовищі з опором дзиги Лагранжа з довільною порожниною, наповненою ідеальною рідиною.

1.2.2 Стійкість обертань твердого тіла і твердого тіла з рідиною на підвісі

Необхідність у дослідженні поведінки тіл, що обертаються, підвішених на струнному підвісі, виникла під час Великої Вітчизняної війни спочатку при вивченні впливу обертання на ефект кумуляції потім у зв'язку з питаннями стійкості снарядів з рідким заповненням. При вирішенні проблеми кумуляції снарядів виникла потреба у обертанні твердих тіл з великими кутовими швидкостями. Для здійснення швидкого обертання тіл було запропоновано ідею використання струни. Як було зазначено раніше, дослідження у цьому напрямі почалися з експериментів М.А. Лаврентьєва та С.В. Малашенка. Експериментально було виявлено, що вертикальна стаціонарна форма при зростанні кутової швидкості переходить у конічну форму. При подальшому зростанні кутової швидкості стає можливою і така форма, за якої струна і вісь твердого тіла відхилені від вертикалі в різні сторони [80]. Було зроблено припущення, що поява нових форм стаціонарного руху пов'язана з втратою стійкості вертикальної форми. Однак Є.П. Морозова (аспірантка Л.П. Смирнова) доказала стійкість по Ляпунову вертикальної форми обертання твердого тіла на струні за будь-якої кутової швидкості, якщо точка підвісу твердого тіла вище його центру мас [141]. Таким чином, поряд з вертикальною одночасно існують кілька стійких форм, які не ведуть до втрати стійкості вихідної вертикальної.

О.Ю. Ішлінським був проаналізований цей цікавий факт одночасного існування декількох стійких форм стаціонарного руху осесиметричного твердого тіла, що обертається, підвішеного на струні. При зростанні кутової швидкості твердого тіла від основної (вертикальної) форми стаціонарного руху відгалужується також стійка, але вже відхилена форма стаціонарного руху, що суперечило відомому правилу Пуанкаре. Це явище було предметом вивчення В.В. Румянцева та його учнів і призвело до цілого ряду публікацій, які обговорювали різні постановки задачі [181]. П.В. Харламов у роботах "Движение тела на подвесе" [126,с.120] та "О смене стационарных движений тела на подвесе" [126,с.131] дав пояснення відходу твердого тіла, що обертається, від вертикальної до інших форм стаціонарних рухів.

Задача про рух підвішеного на струні твердого тіла є подальшим узагальненням задачі про рух твердого тіла навколо нерухомої точки та має велике практичне та наукове значення. Інтерес до дослідження руху тіла на струні та струнному підвісі привернув увагу багатьох учених. Великий внесок у вирішення таких задач пов'язаний із іменами О.Ю. Ішлінського, В.В. Рум'янцева, С.В. Малащенко, В.М. Рубановського, В.А. Стороженко, М.Е. Темченко, П.В. Харламова, О.Я. Савченко, М.Е. Лесіної та багато інших.

Прикладом пристроїв, що використовують струнний підвіс з великою власною масою, є великі відцентрові стенди-центрифуги, які призначені для випробування різних приладів та пристроїв в умовах перевантажень. Ідея такого стенда було запропоновано та здійснено на практиці С.В. Малащенко [135]. Струнний підвіс складається із системи кількох жорстких стержнів, послідовно з'єднаних шарнірами Гука. Такими шарнірами підвіс з'єднаний з центрифугою і віссю ротора електродвигуна, кутова швидкість якого може регулюватися в широких межах. Вивчені питання, пов'язані з урахуванням власної маси струнного підвісу при дослідженні роботи центрифуги, визначені критичні значення кутової швидкості обертання центрифуги та розглянуто низку інших питань.

В.Н. Скімель [164] вивчив стаціонарні рухи гіростата, підвішеного на струні. Методом Рауса-Ляпунова виділено стійкі рухи, побудовано характеристичне рівняння.

У роботі [80] вивчено рух підвішеного на струні твердого тіла довільної конфігурації в припущенні, що точка кріплення його до струни не лежить на жодній з головних центральних осей інерції. Отримано рівняння стаціонарних рухів тіла та проведено їх дослідження. Також наведено опис експериментальної установки, що ілюструє принципову можливість динамічного балансування швидкообертових тіл, на струнному приводі. Експеримент полягав у наступному: тверде тіло було підвішене на струні, а потім йому надавали швидке обертання. Виявилося, що при великій кутовій швидкості існував стаціонарний рух, у якому одна з його головних центральних осей інерції займала положення, яке практично збігається з вертикаллю, що проходить через нерухому точку. Спостереження за цим стаціонарним рухом дало можливість С.В. Малащенко висловити ідею динамічного балансування на струнному приводі твердих тіл, що швидко обертаються, виявилася можливою експериментальна перевірка теоретичних досліджень поведінки дзиги, що містить рідину [136]. Проведені теоретичні та експериментальні дослідження показали можливість застосування струнного приводу для балансування твердих тіл, що швидко обертаються. Похибка балансування практично не залежить від положення точки кріплення струни відносно геометричної осі симетрії тіла. Зазначений ефект самобалансування тіла, що обертається на струні, дає великі можливості великі можливості при експериментах; знімається питання про спеціальне балансування випробувального об'єкта, знижуються вимоги до точності його виготовлення та ін. Це дозволило з великою простотою та ефективністю здійснювати різноманітні дослідження кумулятивних зарядів, що обертаються, а також якісно покращити і спростити створення центрифуг для досліджень.

Основну увагу в роботі О.Ю. Ішлінського, М.Е. Темченко та В.А. Стороженко [81] приділено вивченню обертання твердих тіл на невагомій, нерозтяжній, абсолютно гнучкій струні і на струнному підвісі, що являє собою систему вагомих жорстких стержнів, послідовно з'єднаних шарнірами Гука. Вивчаються різноманітня стаціонарних рухів тіл, підвішених на струні та струнному підвісі, їхню стійкість та біфуркацію. Теоретичні дослідження здебільшого супроводжуються описом відповідних екс-

периментів. Висвітлюються питання, пов'язані з практичним використанням струнного підвісу у деяких механічних пристроях. Розглянуті також задачі визначення напрямів головних осей інерції у твердому тілі.

В.В. Румянцевим та В.Н. Рубановським зроблено значний внесок у дослідження стійкості стаціонарних рухів твердого тіла на струні. У роботі [149] розглянуто випадок, коли струна кріпиться до горизонтальної штанги, яка обертається навколо вертикалі, що проходить через нерухому точку штанги. Відзначено важливість різних способів кріплення кінців струни, таких як шарнірний та жорсткий. Знайдено достатні умови стійкості відносної рівноваги тіла на струні. Далі В.В. Румянцевим вивчений випадок, коли точка підвісу тіла до струни не розташована в жодній з головних центральних площин інерції, встановлено достатні умови стійкості деяких рухів несиметричного тіла. У разі симетричного тіла та належності точки підвісу осі симетрії знайдено достатні умови стійкості регулярних прецесій та рівномірних обертань. В.Н. Рубановським [148, 150] проведено дослідження стійкості рівномірних обертань навколо вертикалі твердого тіла, підвішеного на невагомому стержні, даний аналіз необхідних умов стійкості, який слідує з аналізу рівнянь першого наближення, і достатніх, що сліднують з умов мінімуму сукупності інтегралів рівнянь збуреного руху. У просторі основних параметрів виділені області стійкості та нестійкості, а також стійкості в першому наближенні. Знайдені області, для яких рух стійкий у першому наближенні в тому випадку, коли точка підвісу розташована вище за нерухому точку, а центр мас знаходиться вище або нижче точки підвісу. У роботі [149] В.Н. Рубановським та В.В. Румянцевим розглянуті стаціонарні рухи важкого динамічно-симетричного твердого тіла, підвішеного шарнірно до нерухомої точки на невагомій абсолютно гнучкій нерозтяжній струні з точкою підвісу на осі симетрії. Побудовано лінійну сукупність інтегралів рівнянь збуреного руху, умови мінімуму якої дають достатні умови стійкості перманентних обертань і регулярних прецесій.

В.А. Стороженко [171] досліджував стійкість обертання твердого тіла, підвішеного за допомогою системи твердих тіл, з'єднаних шарнірами Гука. Він показав, що у першому наближенні рівномірне обертання розглянутої СЗТТ стійке.

Стійкість стаціонарних рухів твердого тіла, точка підвісу якого до струни не лежить на осі симетрії, вивчав В.А. Стороженко. Він встановив достатні умови стійкості за допомогою теореми Меркіна про стійкість гіроскопічних систем. Повна картина стаціонарних рухів осесиметричного твердого тіла дана в роботі В.А. Стороженко, М.Е. Темченко [168], в якій розглянуті різні випадки взаємного розташування центру мас тіла, точки підвісу його до струни і нерухомої точки. При цьому тверде тіло може бути витягнутим та сплюснутим.

Більшість досліджень, присвячених стійкості обертальних рухів твердих тіл, які підвішені на струні, проводилися в ідеалізованому випадку, тобто струна або стержень допускалися позбавленими маси, а також не чинили опір скручуючим зусиллям. Хоча реальний струнний підвіс для значних за розмірами тіл має порівняно велику власну масу, яку необхідно враховувати при аналізі руху тіла, особливо з великими кутовими швидкостями. У роботі [171] В.А. Стороженко досліджено один з можливих способів реального здійснення вагової струни, що не скручується, шляхом моделювання струни n однаковими круговими циліндрами, з'єднаними шарнірами Гука. Наведено рівняння руху такої системи, що допускає рішення, яке відповідає рівномірному обертанню СЗТТ, в якій осі симетрії всіх її елементів колінеарні вектору сили тяжіння. Показано, що вертикальна форма динамічної рівноваги тіла, підвішеного вказаним способом, стійка в першому наближенні за будь-яких значень кутової швидкості обертання. Аналогічний результат було отримано для тіла, підвішеного на невагомій абсолютно гнучкій струні.

М.Е. Темченко розглянула вплив демпфування на стійкість стаціонарних рухів тіла, підвішеного на важкому стержні [176]. Тіло і стержень пов'язані шарніром Гука (універсальним шарніром), вільний кінець стержня також шарніром Гука з'єднаний з електродвигуном. Встановлено умови асимптотичної стійкості стаціонарних рухів, що вивчаються, за допомогою узагальненого критерію Гурвіца.

В роботі Г.А. Кононихіна [114] показано, що рівномірні обертання важкого твердого тіла, підвішеного на струні, можливі тільки тоді, коли тіло і струна обертаються як єдине тверде тіло навколо вертикалі. Струнний привід виявився ефективним для

експериментальної перевірки теоретичних досліджень [79, 171]. Він використовується на практиці при конструюванні різного роду пристроїв з тілами, що швидко обертаються. Відомо, що при конструюванні і виготовленні різного роду машин, складовими частинами яких є тіла, що швидко обертаються (наприклад, махові колеса, ротори турбін), не можна обійтися без більш точного їх центрування, тобто поєднання центру мас тіл з осями їх обертання.

У книзі О.Ю. Ішлінського, В.А. Стороженко та М.Е. Темченко [79] представлені задачі дослідження стійкості СЗТТ, великих відцентрових стендів, тіл, що обертаються на струнному та електромагнітному підвісах. Наведені деякі підходи, що полегшують дослідження стійкості гіроскопічних та навігаційних систем. Проведено якісний аналіз задачі, дано ясне механічне тлумачення отриманого результату, виявлено вплив характерних параметрів на динаміку досліджуваної системи.

У роботі В.М. Кошлякова [118] за допомогою методу усереднення досліджується стійкість вертикального обертання тіла, підвішеного на жорсткій струні, з урахуванням дисипативних сил.

У роботі І. А. Болграбської та О.Я. Савченко[54] показана ідея застосування системи гіроскопів Лагранжа, з'єднаних пружними універсальними шарнірами Гука, як наближена модель обертового важкого осесиметричного пружного стержня. Практична значущість полягає в тому, що важкий пружний стержень знаходить широке застосування як елемент конструкцій у сучасній техніці, зокрема він може виконувати роль струнного підвісу для тіл, значних за масою та габаритами. У зв'язку з цим дослідження системи шарнірно-зв'язаних гіроскопів Лагранжа має практичне значення.

У монографії В.А. Стороженко [169] викладено результати досліджень, пов'язаних із розв'язанням задачі визначення головних осей інерції неоднорідного твердого тіла, вивчені встановлені обертальні рухи неоднорідних твердих тіл, які підвішені різними способами. На підставі властивостей цих установлених рухів запропоновані принципові схеми пристроїв для експериментального вирішення зазначеної задачі. Також розглянуто питання стійкості та точності роботи цих пристроїв.

Дослідження руху тіла на струнному підвісі, започатковані в Інституті математики НАН України у 50-х роках М.А. Лаврентьєвим, О.Ю. Ішлінським, С.В. Малашенком, і наразі успішно розвиваються їхніми учнями та послідовниками.

Також виник інтерес до задачі про рух підвішеного на струні тіла, яке має порожнину, повністю заповнену рідиною. Це викликано спробами отримати шляхом порівняння експериментальних та теоретичних результатів наближені розрахункові формули для моменту, що діє з боку рідини на тіло-носії. Так, рівняння руху підвішеного на струні важкого осесиметричного тіла з порожниною у формі еліпсоїда обертання, повністю заповненого ідеальною рідиною, яка здійснює однорідний вихровий рух, отримані О.Ю. Ішлінським, М.Є. Темченком [79] у вигляді рівнянь Лагранжа, де положення струни визначається за допомогою кутів Крилова, а тіла - за допомогою кутів Ейлера.

У роботах [83] показано, що тверде тіло, яке обертається, з циліндричною порожниною, повністю заповненою ідеальною рідиною, поводить себе неспокійно, при зміні кутової швидкості (при розгоні або вибігу) воно багаторазово втрачає стійкість і знову її відновлює. Вертикальне обертання тіла на струні за наявності в ньому сферичної порожнини, повністю наповненої ідеальною рідиною, стійке і має той же характер, що і рух суцільного твердого тіла, що обертається.

Цикл експериментальних робіт з дослідження стійкості обертального руху тіл з рідким наповненням проведений В.Т. Десятовим [64]. Для надання тілам обертального руху в експериментах було використано струнний привід, запропонований С.В. Малашенком. Експерименти показали, що негативний вплив рідини на стійкість обертального руху тіла проявляється у вигляді помітних коливань тіла відносно центру мас. Втрата стійкості характеризується поступовим зростанням амплітуди цих коливань. З метою визначення впливу параметрів струни та місця її кріплення були проведені дослідження при зміні характеристик струни: матеріалу, довжини та діаметру її поперечного перерізу, величини перекидаючого та відновлюючого моментів, величини кутової швидкості. Результати досліджень показали, що досліджені фактори не змінюють самого факту втрати стійкості і не зміщують центр діапазону коефіцієнтів наповнення, при яких відбувається втрата стійкості.

У статті О.Я. Савченко, С.М. Судакова та Е.В. Поздняковича [154] побудовані нелінійні рівняння руху підвішеного на струні важкого твердого тіла з еліпсоїдальної порожниною, повністю заповненою рідиною, що здійснює однорідний вихровий рух; виділено рішення, що відповідає рівномірним обертанням тіла-носія та рідини навколо вертикалі; побудовано характеристичне рівняння та запропоновано алгоритм його дослідження.

Задача про рух динамічно симетричного важкого тіла, підвішеного на струні до нерухомої точки і має осесиметричну еліпсоїдальну порожнину, повністю заповнену в'язкою рідиною розглянута в роботах Т.С. Суміна [174, 175]. Виписано рівняння руху динамічної системи, проведено дослідження стійкості стаціонарних рухів за допомогою модифікованої теорії Рауса, розглянуто модель руху важкого динамічно-симетричного тіла з осесиметричною еліпсоїдною порожниною, повністю заповненою ідеальною не стисливою рідиною. Рідина здійснює однорідний вихровий рух. Тіло підвішене на жорсткій нерозтяжній струні. Розглянуто стаціонарні рухи: рівномірні обертання тіла та рідини в порожнині навколо спільної осі симетрії. Отримано такі результати: якщо рідина повільно обертається всередині порожнини, то незалежно від кутової швидкості тіла стаціонарні рухи стійкі; при швидкому обертанні рідини в порожнині достатньою умовою стійкості є певна стислість порожнини вздовж осі симетрії; у випадку, коли рідина і тіло обертаються як одне ціле, отримані достатні умови стійкості у вигляді нерівностей на параметри задачі.

Наведений вище огляд публікацій підтверджує велике теоретичне та прикладне значення досліджень динаміки тіл на струнному підвісі для сучасної науки та техніки. Незважаючи на велику кількість робіт, присвячених стійкості обертання твердих тіл (з рідким наповненням або без), підвішених на струні, дотепер недостатньо досліджено вплив властивостей струни: масових, інерційних і пружних.

1.3 Методи визначення стійкості консервативних та неконсервативних динамічних систем

1.3.1 Критерій Рауса-Гурвіца та Ляпунова-Шіпара

Згідно з першим методом Ляпунова незбурений рух асимптотично стійкий, якщо всі корені характеристичного рівняння лежать зліва від уявної осі і нестійкий,

якщо є хоча б один корінь з додатньою дійсною частиною [137]. Критерій Рауса-Гурвіца або його модифікація - критерій Льєнара-Шіпара дають необхідні і достатні умови того, щоб всі корені поліному з дійсними коефіцієнтами мали від'ємні дійсні частини. Число детермінантних нерівностей у критерії Льєнара-Шіпара приблизно вдвічі менше, ніж у критерії Рауса-Гурвіца і тому він найбільш зручний [60].

Якщо ж вікове рівняння має корені, дійсна частина яких дорівнює нулю, то в цих випадках, так званих критичними, умови стійкості, отримані, виходячи з аналізу коренів характеристичного рівняння, можуть розглядатися лише як необхідні умови стійкості. Слід зазначити, що для більшості механічних систем має місце закон збереження енергії. Такі системи називаються консервативними і вони можуть бути стійкими лише в критичних випадках.

Умови існування дійсних коренів можна отримати на основі теореми Штурма, критерію Гурвіца та інваріантного підходу. Згідно теореми Штурма число різних дійсних коренів поліному n -того ступеня $F_n(x)$ дорівнює індексу раціональної функції [60]

$$\text{Ind } S(x) = \frac{F'_n(x)}{F_n(x)}.$$

Де

$$\begin{aligned} F_n(x) &= M_1 x^n + M_2 x^{n-1} + \dots + M_{n-1} x + M_n, \\ F'_n(x) &= n M_1 x^{n-1} + (n-1) M_2 x^{n-2} + \dots + 2 M_{n-2} x + M_{n-1}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Для дійсності всіх коренів полінома $F_n(x)$ з дійсними коефіцієнтами необхідно і достатньо, щоб старші коефіцієнти відповідного ряду Штурма, складеного за допомогою $F_n(x)$ і $F'_n(x)$, мали один і той же знак [183] Критерій Гурвіца передбачає додатність всіх головних діагональних мінорів парного порядку матриці Гурвіца.

Нехай поліном n -того ступеня з дійсними коефіцієнтами заданий у вигляді

$$F_n(x) = \alpha_{00} x^n + \alpha_{01} x^{n-1} + \dots + \alpha_{0n-1} x + \alpha_{0n} \quad (1.12)$$

Відповідно до теореми, наведеної в [96], поліном (1.12) з додатнім старшим коефіцієнтом матиме n різних дійсних коренів у разі, якщо всі головні мінори симетричної матриці B (порядку $n-1$) будуть позитивними

$$B = \begin{bmatrix} B_{22} & B_{23} & \cdots & B_{2n} \\ B_{23} & B_{33} & \cdots & B_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{2n} & B_{3n} & \cdots & B_{nn} \end{bmatrix}, \quad (1.13)$$

елементи B_{ij} розраховуються за рекурентною формулою:

$$B_{ki} = (k-1)(n+1-i)a_{0k-1}a_{0i-1} - n \sum_{j=0}^{v=k-2} (i-v+2j)a_{0v-j}a_{0i+j} \quad (k = \overline{2, n}; i = \overline{k, n}). \quad (1.14)$$

В основі іннорного підходу [65, 104], як і в методі Гурвіца, лежить матричний метод. Із коефіцієнтів полінома $F_n(x)$ і $F'_n(x)$ (1.11) будується матриця Сільвестра розміром $(2n-1)(2n-1)$

$$\Delta_{2n-1} = \begin{vmatrix} M_1 & \cdots & M_{n-3} & M_{n-2} & M_{n-1} & M_n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & M_5 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & \cdots & M_n \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & nM_1 & (n-1)M_2 & (n-2)M_3 & \cdots & M_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & nM_1 & (n-1)M_2 & (n-2)M_3 & (n-3)M_4 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & nM_1 & (n-1)M_2 & (n-2)M_3 & (n-3)M_4 & (n-4)M_5 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ nM_1 & \cdots & 3M_{n-3} & 2M_{n-2} & M_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \quad (1.15)$$

Шляхом викреслювання першого і останнього рядка і першого та останнього стовпця початкової матриці (1.15) отримується матриця Δ_{2n-3} . Ця матриця називається іннором матриці Δ_{2n-1} . Повторюючи дану процедуру отримується послідовність матриць $\Delta_1, \Delta_3, \dots, \Delta_{2n-3}, \Delta_{2n-1}$ ($\Delta_1 = M_1 > 0$). Необхідною і достатньою умовою існування n різних дійсних коренів у поліному $F_n(x)$ є додатність всіх отриманих іннорів [65, 104].

$$|\Delta_{2i-1}| > 0 \quad (i = \overline{1, n}) \quad (1.16)$$

1.3.2 Критерій Лєнара-Шіпара записаного на підставі іннорного підходу.

Нехай поліном $F(s)$ має вигляд [65]:

$$F(s) = s^n + (a'_{n-1} + ia''_{n-1})s^{n-1} + (a'_{n-2} + ia''_{n-2})s^{n-2} + \dots + a'_0 + ia''_0 \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_{n-1}^o &= \begin{bmatrix} a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ 0 & & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & a_0 \\ 0 & & a_n & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n-2} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\
 \Delta_{n-1}^e &= \begin{bmatrix} a_n & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & a_0 \\ \vdots & & 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & a_1 \\ \vdots & & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & a_1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (1.20)$$

Зауважимо, що критерій Лъенара – Шіпара можна представити і в деяких інших видах [65].

Приведений вище метод являється простішим з обчислювальної точки зору.

Відносна стійкість значна для забезпечення прийняттого перехідного режиму в безперервних лінійних системах. З математичної точки зору питання відносної стійкості зводиться до задачі знаходження необхідних та достатніх умов того, що всі нулі характеристичного рівняння системи лежать у певному секторі лівої півплощини простору. Друга проблема, що розглядається тут, проблема аперіодичності виникає в тих випадках, коли бажано, щоб перехідний процес протікав взагалі без коливань або з кінцевим числом коливань. Математично це означає, що нам потрібно отримати необхідні та достатні умови того, що всі нулі характеристичного рівняння різні і лежать на від'ємній дійсній вісі. Зрозуміло, що вирішення обох проблем одночасно гарантує і стійкість[65].

Умови аперіодичності (аперіодичних стійких систем), як показав Фуллер [17], можна отримати з послідовностей Штурма. Робиться це так. Для заданого дійсного полінома вигляду (1.19) необхідні і достатні умови того, щоб всі його корені дійсні, різні і від'ємні, полягають у наступному[65]:

- 3) всі коефіцієнти a_i' мають бути строго додатними
- 4) наступна матриця Δ_{2n-1} розміром $(2n-1) \times (2n-1)$ має бути іннерно-додатною

$$\Delta_{2n-1} = \begin{bmatrix} a_n & \dots & a_3 & & a_2 & & a_1 & & a_0 & & 0 & & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \dots & a_n & & a_{n-1} & & a_{n-2} & & a_{n-3} & & a_{n-4} & & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & & a_n & & a_{n-1} & & a_{n-2} & & a_{n-3} & & \dots & a_0 \\ 0 & \dots & 0 & & 0 & & \boxed{na_n} & & (n-1)a_{n-1} & & (n-2)a_{n-2} & & \dots & a_1 \\ 0 & \dots & 0 & & na_n & & (n-1)a_{n-1} & & (n-2)a_{n-2} & & (n-3)a_{n-3} & & \dots & 0 \\ 0 & \dots & na_n & & (n-1)a_{n-1} & & (n-2)a_{n-2} & & (n-3)a_{n-3} & & (n-4)a_{n-4} & & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ na_n & \dots & 3a_3 & & 2a_2 & & a_1 & & 0 & & 0 & & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

Слід також зазначити, що необхідні і достатні умови того, щоб всі нулі полінома (1.19) різні і були на дійсній осі полягає в іннорно-додатній матриці (1.21).

1.4 Висновки до розділу 1

Наведений огляд сучасного стану розв'язання задач динаміки та стійкості обертання у середовищі з опором систем пружно зв'язаних твердих тіл та систем твердих тіл з рідиною свідчить про те, що ці задачі ще не вирішені і потребують подальших аналітичних та чисельних досліджень, оскільки вони мають не тільки теоретичний інтерес, а і велике практичне значення.

РОЗДІЛ 2

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. ВИВІД ХАРАКТЕРИСТИЧНОГО РІВНЯННЯ ЗБУРЕНОГО ОБЕРТАННЯ У СЕРЕДОВИЩІ З ОПОРОМ НЕВІЛЬНОЇ СИСТЕМИ ДВОХ ПРУЖНО ЗВ'ЯЗАНИХ ГІРОСКОПІВ ЛАГРАНЖА З ІДЕАЛЬНОЮ РІДИНОЮ

У цьому розділі наведено постановку задачі про руху у середовищі з опором невіЛЬНОЇ системи двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа з нестисливою рідиною. На підставі рівнянь руху систем зв'язаних гіростатів П.В. Харламова виведені рівняння руху механічної системи, яка розглядається. На основі функції стану С.Л. Соболева для ідеальної обертової рідини виведені рівняння руху у середовищі з опором системи двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа з довільними осесиметричними порожнинами, що містять ідеальну рідину та одержано характеристичного рівняння збурених рівномірних обертань двох гіроскопів з рідиною. З урахуванням основного тону коливання ідеальної рідини отримано в вигляді полінома шостого ступеня характеристичне рівняння. Розглянуто різні випадки цього характеристичного рівняння, а саме: випадок відсутності рідини в першому твердому тілі, у другому або у двох твердих тіл, випадок відсутності постійних моментів у інерційній або неінерційній системах відліку, випадок універсального пружного шарніру та випадок відсутності дисипації постійних моментів.

2.1 Постановка задачі вивід основних рівнянь

Позначимо через S_i тіло, яке складається з твердого тіла S_i^0 , що має осесиметричну довільну порожнину τ_i , повністю заповнену однорідною нестисливою рідиною щільності ρ_i та кінематичною в'язкістю ν_i ($i = 1, 2$). Нехай динамічно-симетричні тверді тіла S_1^0 і S_2^0 зв'язані в точці O_2 пружним відновлювальним сферичним шарніром $L_2 = k_2 \mathbf{s}_1 \times \mathbf{c}_2 / (|\mathbf{s}_1| |\mathbf{c}_2|)$, $k_2 \geq 0$. Тіло S_1^0 має нерухому точку O_1 в якій також діє пружний відновлювальний сферичний шарнір $L_1 = k_1 \mathbf{v} \times \mathbf{s}_1 / |\mathbf{s}_1|$, $k_1 \geq 0$. Кожне тверде тіло S_i^0 ($i = 1, 2$) знаходиться під дією сили тяжіння, дисипативного моменту

$$\mathbf{M}_i = D_i \boldsymbol{\omega}_i (D_i = \text{diag}(D_{i1}, D_{i1}, D_{i3}), D_{ij} > 0; i = 1, 2; j = 1, 3),$$

що моделює середовище з опором, постійного моменту $\mathbf{M}_{iq} = Q_i \mathbf{e}_3^i$, який спрямований вздовж осі симетрії твердого тіла S_i^0 і постійного моменту $\mathbf{M}_{ip} = P_i \mathbf{v}$ ($\mathbf{v} = -\mathbf{g} / g$). Моменти $\mathbf{M}_{ip}$ і $\mathbf{M}_{iq}$ є постійними відповідно в інерціальній і неінерціальній системах відліку і підтримують рівномірне обертання твердих тіл S_i^0 навколо вертикалі. Тут ω_i – кутова швидкість твердого тіла S_i^0 ; $\mathbf{g}$ – вектор прискорення вільного падіння, $g = |\mathbf{g}|$. Момент $\mathbf{M}_{iq}$ спрямований по третій головній осі інерції тіла S_i .

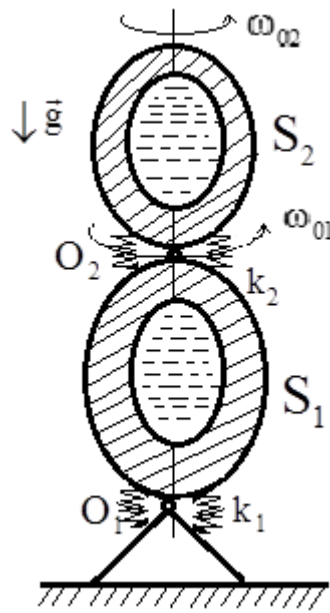


Рис. 2.1 – Система двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа з рідиною

Тверде тіло S_i^0 з порожниною, повністю заповненою однорідною нестисливою рідиною, є гіростатом [185]. Тому механічна система, що розглядається, є системою гіростатів і рівняння обертання двох важких, пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа з ідеальною або в'язкою рідиною, з урахуванням дисипативних і постійних моментів, матимуть вигляд [180, 156, 103, 110, 24, 25]:

$$\begin{aligned}
 (J_1 \cdot \omega_1 + \lambda_1)' + m_2 \mathbf{s}_1 \times (\omega_1 \times \mathbf{s}_1 + \omega_2 \times \mathbf{c}_2)' &= \\
 = (m_1 \mathbf{c}_1 + m_2 \mathbf{s}_1) g \times \mathbf{v} + \mathbf{L}_1 - \mathbf{L}_2 + \mathbf{M}_{1q} + \mathbf{M}_{1p} - D_1 \omega_1, \\
 (J_2 \cdot \omega_2 + \lambda_2)' + m_2 \mathbf{c}_2 \times (\omega_1 \times \mathbf{s}_1 + \omega_2 \times \mathbf{c}_2)' &= \\
 = m_2 \mathbf{c}_2 g \times \mathbf{v} + \mathbf{L}_2 + \mathbf{M}_{2q} + \mathbf{M}_{2p} - D_2 \omega_2.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Тут $J_i = \text{diag}(A_i, A_i, C_i)$ – тензор інерції твердого тіла S_i^0 і рідини відносно точки O_i ;

$\lambda_i = \rho_i \int_{\tau_i} \mathbf{r}_i \times \mathbf{u}_i d\tau$ – гіростатичний момент;

$\mathbf{u}_i$ – вектор відносної швидкості рідини в порожнині τ_i ; точкою позначена абсолютна похідна; $\mathbf{s}_1 = \overrightarrow{O_1 O_2}$; $\mathbf{c}_i = \overrightarrow{O_i C_i}$; m_i і C_i – маса і центр мас тіла S_i .

Зв'яжемо з кожним твердим тілом S_i^0 незмінно базис $\mathbf{e}_1^i \mathbf{e}_2^i \mathbf{e}_3^i$ з вершиною в точці O_i , осі якого направимо по головних осях тензора інерції J_i і введемо нерухомий базис $\mathbf{e}_1^0 \mathbf{e}_2^0 \mathbf{e}_3^0$, вектор $\mathbf{e}_3^0$ якого збігається з вектором $\mathbf{v}$. Нехай $\mathbf{s}_1 = s_1 \mathbf{e}_3^1$, $\mathbf{c}_i = c_i \mathbf{e}_3^i$.

Векторні рівняння (2.1) в проекціях на осі рухомого базису $\mathbf{e}_1^i \mathbf{e}_2^i \mathbf{e}_3^i$ приймуть вигляд:

$$\begin{aligned} A'_1 \dot{p}_1 + (C_1 - A'_1) q_1 r_1 + \mu [(\dot{p}_2 - q_2 r_2) \alpha_{22}^{11} - (\dot{q}_2 + p_2 r_2) \alpha_{21}^{11} + (p_2^2 + q_2^2) \alpha_{23}^{11}] + Q_{11} = \\ = (\tilde{a}_1 g - k_1) \alpha_{32}^{01} - k_2 (\alpha_{31}^{20} \alpha_{21}^{10} + \alpha_{32}^{20} \alpha_{22}^{10} + \alpha_{33}^{20} \alpha_{23}^{10}) - D_{11} p_1 - \alpha_{31}^{01} P_1, \\ A'_1 \dot{q}_1 - (C_1 - A'_1) p_1 r_1 - \mu [(\dot{p}_2 - q_2 r_2) \alpha_{12}^{11} - (\dot{q}_2 + p_2 r_2) \alpha_{11}^{11} + (p_2^2 + q_2^2) \alpha_{13}^{11}] + Q_{12} = \\ = (-\tilde{a}_1 g + k_1) \alpha_{31}^{01} + k_2 (\alpha_{31}^{20} \alpha_{11}^{10} + \alpha_{32}^{20} \alpha_{12}^{10} + \alpha_{33}^{20} \alpha_{13}^{10}) - D_{11} q_1 - \alpha_{32}^{01} P_1, \\ A'_2 \dot{p}_2 + (C_2 - A'_2) q_2 r_2 + \mu [(\dot{p}_1 - q_1 r_1) \alpha_{22}^{12} - (\dot{q}_1 + p_1 r_1) \alpha_{12}^{12} + (p_1^2 + q_1^2) \alpha_{32}^{12}] + Q_{21} = \\ = (\tilde{a}_2 g - k_1) \alpha_{32}^{02} - k_2 (\alpha_{31}^{10} \alpha_{21}^{20} + \alpha_{32}^{10} \alpha_{22}^{20} + \alpha_{33}^{10} \alpha_{23}^{20}) - D_{21} p_2 - \alpha_{31}^{02} P_2, \\ A'_2 \dot{q}_2 - (C_2 - A'_2) p_2 r_2 - \mu [(\dot{p}_1 - q_1 r_1) \alpha_{21}^{12} - (\dot{q}_1 + p_1 r_1) \alpha_{11}^{12} + (p_1^2 + q_1^2) \alpha_{31}^{12}] + Q_{22} = \\ = (-\tilde{a}_1 g + k_1) \alpha_{31}^{02} + k_2 (\alpha_{31}^{10} \alpha_{21}^{20} + \alpha_{32}^{10} \alpha_{22}^{20} + \alpha_{33}^{10} \alpha_{23}^{20}) - D_{21} q_2 - \alpha_{32}^{02} P_2, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$C_i \dot{r}_i + Q_{i3} = -D_{i3} r_i + Q_i - \alpha_{33}^{02} P_2, \quad i = 1, 2. \quad (2.3)$$

До системи рівнянь (2.2) – (2.3) потрібно додати рівняння для напрямних косинусів і рівняння руху рідини у порожнині τ_i [156]:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_{11}^{i0} &= -q_i \alpha_{31}^{i0} + r_i \alpha_{21}^{i0}, \quad \dot{\alpha}_{21}^{i0} = p_i \alpha_{31}^{i0} - r_i \alpha_{11}^{i0}, \\ \dot{\alpha}_{12}^{i0} &= -q_i \alpha_{32}^{i0} + r_i \alpha_{22}^{i0}, \quad \dot{\alpha}_{22}^{i0} = p_i \alpha_{32}^{i0} - r_i \alpha_{12}^{i0}, \\ \dot{\alpha}_{13}^{i0} &= -q_i \alpha_{33}^{i0} + r_i \alpha_{23}^{i0}, \quad \dot{\alpha}_{23}^{i0} = p_i \alpha_{33}^{i0} - r_i \alpha_{13}^{i0}, \\ \dot{\alpha}_{31}^{i0} &= -p_i \alpha_{21}^{i0} + q_i \alpha_{11}^{i0}, \quad \dot{\alpha}_{32}^{i0} = -p_i \alpha_{22}^{i0} + q_i \alpha_{12}^{i0}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\dot{\alpha}_{33}^{i0} = -p_i \alpha_{23}^{i0} + q_i \alpha_{13}^{i0},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + (\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \mathbf{u}_i + 2\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{u}_i + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times \mathbf{r}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_i) + \dot{\mathbf{V}}_i = \\ = -\frac{1}{\rho_i} \nabla \tilde{P}_i - \nabla U + \nu_i \Delta \mathbf{u}_i, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_i = 0 \text{ в } \tau_i, \mathbf{u}_i = 0 \text{ (} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_i = 0 \text{ при } \nu_i = 0 \text{) на } \Sigma_i.$$

Де p_i, q_i, r_i – проекції вектора кутової швидкості $\boldsymbol{\omega}_i$ твердого тіла S_i^0 на осі $\mathbf{e}_1^i \mathbf{e}_2^i \mathbf{e}_3^i$, $\tilde{Q}_{ij} = (\boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{\lambda}_i + \dot{\boldsymbol{\lambda}}_i) \cdot \mathbf{e}_j^i$; $J_i = \operatorname{diag}(A_i, A_i, C_i)$, $A'_1 = A_1 + s_1^2 m_2$, $A'_2 = A_2$, $\tilde{a}_1 = m_1 c_1 + m_2 s_1$, $\tilde{a}_2 = m_2 c_2$, $\mu = s_1 \tilde{a}_2$, $\tilde{P}_i$ – тиск в порожнині τ_i ; U – потенціал масових сил (масові сили вважаються потенційним); $\dot{\mathbf{V}}_i$ – прискорення точки O_i ; Σ_i – границя області τ_i .

2.2 Вивід рівнянь збурених рівномірних обертань у середовищі з опором системи двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа з ідеальною рідиною

Припустимо, що в незбуреному русі тверде тіло S_i^0 і рідина в порожнині обертаються як одне ціле з кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega}_{0i}$ навколо вертикалі. Нехай $\boldsymbol{\omega}_{0i} = \omega_{0i} \mathbf{e}_3^i$.

Система (2.2) – (2.5) допускає частинний розв'язок:

$$\begin{aligned} p_i = q_i = 0, r_i = \omega_{0i} = (Q_i \pm P_i) / D_{i3}, \mathbf{u}_i = 0, \\ \alpha_{11}^{i0} = \cos \omega_{0i} t, \alpha_{12}^{i0} = \pm \sin \omega_{0i} t, \alpha_{13}^{i0} = 0, \\ \alpha_{21}^{i0} = -\sin \omega_{0i} t, \alpha_{22}^{i0} = \pm \cos \omega_{0i} t, \alpha_{23}^{i0} = 0, \\ \alpha_{31}^{i0} = 0, \alpha_{32}^{i0} = 0, \alpha_{33}^{i0} = \pm 1. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Нехай в збуреному русі:

$$\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}_{0i} + \boldsymbol{\Omega}_i, \quad (2.7)$$

де $|\boldsymbol{\Omega}_i|$ є величина першого порядку малості порівняно з $|\boldsymbol{\omega}_{0i}|$.

Рівняння руху рідини у τ_i порожнині з точністю до величин другого порядку малості мають вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + 2\boldsymbol{\omega}_{0i} \times \mathbf{u}_i + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_i \times \mathbf{r}_i = -\nabla p_i + \nu_i \Delta \mathbf{u}_i, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_i = 0 \text{ в } \tau_i, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\mathbf{u}_i = 0 \quad (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_i = 0 \text{ при } \nu_i = 0) \text{ на } \Sigma_i.$$

Величина p_i зв'язана з тиском $\tilde{P}_i$ співвідношенням:

$$\tilde{P}_i = \rho_i [p_i - U - \mathbf{V}_i \cdot \vec{r} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_i)^2].$$

У першому розділі було відмічено, що у разі сильно в'язкої рідини ($\text{Re}_i \ll 1$) гіростатичний момент λ_i обчислюється за формулою:

$$\lambda_i = -\rho_i P_i^{(1)} \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \text{Re}_i + \rho_i (P_i^{(2)} \ddot{\boldsymbol{\omega}}_i + \omega_{0i} Q_i^{(2)} \dot{\boldsymbol{\omega}}_i) \text{Re}_i^2 + o(\text{Re}_i^3),$$

а у випадку осесиметричних порожнин τ_i ($i=1,2$) з ідеальною рідиною, згідно формул (1.8), він обчислюється за формулою:

$$\lambda_i = \sum_{n=1}^{\infty} S_{in}(t) \mathbf{a}_{in}, \text{ де } \mathbf{a}_{in} = \rho_i \int_{\tau_i} \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_{in} d\tau, \mathbf{a}_{in} = (a_{in}, ia_{in}, 0).$$

В цьому випадку:

$$Q_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{in} (\dot{S}_{in} - i\omega_{0i} S_{in}), Q_{i2} = iQ_{i1}, Q_{i3} = 0$$

(тут і далі слід розрізняти індекс i з уявною одиницею).

Функції S_{in} , згідно рівнянь (1.9), знаходяться із вирішення наступної лічильної системи лінійних звичайних диференціальних рівнянь:

$$N_{in}^2 (\dot{S}_{in} - i\lambda_{in} S_{in}) + a_{in} \dot{\Omega}_i = 0 \quad (n=1,2,3, \dots, \infty; i=1,2). \quad (2.9)$$

Тут $\lambda_{in} = 2\omega_{0i}/\kappa_{in}$, $N_{in}^2 = \int_{\tau_i} \mathbf{v}_{in}^2 d\tau$, комплексні власні векторні функції $\mathbf{v}_{in}$ та відповідні їм власні числа κ_{in} визначаються лише геометрією порожнини та знаходяться з розв'язування відповідної крайової задачі [67, 69, 147].

Зберігаючи колишні позначення, запишемо рівняння збуреного руху системи (2.2):

$$\begin{aligned} A_1' \dot{p}_1 + (C_1 - A_1') \omega_{01} q_1 + \mu \left[(\dot{p}_2 - \omega_{02} q_2) \alpha_{22}^{11} - (\dot{q}_2 + \omega_{02} p_2) \alpha_{21}^{11} \right] + Q_{11} = \\ = (\tilde{a}_1 g - k_1) \alpha_{23}^{10} - k_2 \alpha_{32}^{21} - D_{11} p_1 - \alpha_{31}^{01} P_1, \\ A_1' \dot{q}_1 - (C_1 - A_1') \omega_{01} p_1 - \mu \left[(\dot{p}_2 - \omega_{02} q_2) \alpha_{12}^{11} - (\dot{q}_2 + \omega_{02} p_2) \alpha_{11}^{11} \right] + Q_{12} = \\ = -(\tilde{a}_1 g - k_1) \alpha_{13}^{10} - k_2 \alpha_{32}^{11} - D_{11} q_1 - \alpha_{32}^{01} P_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A'_2 \dot{p}_2 + (C_2 - A'_2) \omega_{02} q_2 + \mu \left[(\dot{p}_1 - \omega_{01} q_1) \alpha_{22}^{12} - (\dot{q}_1 + \omega_{01} p_1) \alpha_{12}^{12} \right] + Q_{21} = \\
= \tilde{a}_2 g \alpha_{23}^{20} - k_2 \alpha_{32}^{22} - D_{21} p_2 - \alpha_{31}^{02} P_2,
\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}
A'_2 \dot{q}_2 - (C_2 - A'_2) \omega_{02} p_2 - \mu \left[(\dot{p}_1 - \omega_{01} q_1) \alpha_{21}^{12} - (\dot{q}_1 + \omega_{01} p_1) \alpha_{11}^{12} \right] + Q_{22} = \\
= -\tilde{a}_2 g \alpha_{13}^{10} - k_2 \alpha_{32}^{12} - D_{21} q_2 - \alpha_{32}^{02} P_2, \\
\dot{\alpha}_{13}^{i0} = \omega_{0i} \alpha_{23}^{i0} - q_i, \quad \dot{\alpha}_{23}^{i0} = -\omega_{0i} \alpha_{13}^{i0} + p_i.
\end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned}
\alpha_{11}^{ik} = \cos \varphi_{ki}, \quad \alpha_{12}^{ik} = -\sin \varphi_{ki}, \quad \alpha_{21}^{ik} = \sin \varphi_{ki}, \\
\alpha_{22}^{ik} = \cos \varphi_{ki}, \quad \varphi_{ki} = \varphi_k - \varphi_i, \quad \varphi_i = \omega_{0i} t, \quad (i, k = 1, 2).
\end{aligned}$$

Рівняння (2.3) відокремлюється від інших рівнянь і його характеристичне рівняння має один дійсний від'ємний корінь.

Перейдемо до нових змінних $p'_i, q'_i, \alpha_{13}^i, \alpha_{23}^i$ [156, 25]:

$$\begin{aligned}
p'_i = p_i \sin \varphi_i + q_i \cos \varphi_i, \quad q'_i = p_i \cos \varphi_i - q_i \sin \varphi_i, \\
\alpha_{13}^i = \alpha_{13}^{0i} \sin \varphi_i + \alpha_{23}^{0i} \cos \varphi_i, \quad \alpha_{23}^i = \alpha_{13}^{0i} \cos \varphi_i - \alpha_{23}^{0i} \sin \varphi_i.
\end{aligned}$$

Нехай $\Omega_i = q'_i - ip'_i, \gamma_i = \alpha_{13}^i + i\alpha_{23}^i, \dot{S}'_{in} = e^{-\varphi_i} S_{in}$ тоді система рівнянь (2.9) – (2.10) може бути представлена таким чином:

$$\begin{aligned}
A'_1 \ddot{\gamma}_1 + (i\tilde{C}_1 + D_1) \dot{\gamma}_1 + \mu \ddot{\gamma}_2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{1n} \dot{S}'_{1n} = (\tilde{a}_1 g - k_1 - k_2) \gamma_1, \\
A'_2 \ddot{\gamma}_2 + (i\tilde{C}_2 + D_2) \dot{\gamma}_2 + \mu \ddot{\gamma}_1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \dot{S}'_{2n} = (\tilde{a}_2 g - k_2) \gamma_2,
\end{aligned} \tag{2.11}$$

де $\tilde{C}_i = C_i \omega_{0i}, D_i = D_{i1}$.

Представивши шукані функції у вигляді $a e^{\lambda t}$, запишемо характеристичне рівняння збуреного руху (2.11) у вигляді:

$$\begin{vmatrix} F_1 & \mu \lambda^2 \\ \mu \lambda^2 & F_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.12}$$

Тут $F_i = A'_i \lambda^2 + (i\tilde{C}_i + D_i) \lambda - \tilde{a}_i g + k_i + k_{i-1} + iP_i - \lambda^2 (i\lambda - \omega_{0i}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_{in}}{i\lambda - \tilde{\lambda}_{in}}, E_{in} = \frac{2a_{in}^2}{N_{in}^2},$

$$\tilde{\lambda}_{in} = \omega_{0i} (1 - \lambda_{in}), \quad \lambda_{in} = \frac{2}{\kappa_{in}}, \quad k_0 = k_3 = 0.$$

З рівняння (2.12) слідує, що якщо центр мас другого гіроскопа збігається з точкою O_2 ($c_2 = 0$, $\tilde{a}_2 = 0$, $\mu = 0$), то в цьому випадку це рівняння розпадається на два рівняння і відсутній взаємовплив першого твердого тіла на друге. Також з цього рівняння витікає, що коли ми розглядаємо тільки один гіроскоп, то для нього характеристичне рівняння запишеться так:

$$F_1 = 0,$$

де

$$F_1 = A_1' \lambda^2 + (i\tilde{C}_1 + D_1) \lambda - \tilde{a}_1 g + k_1 + iP_1 - \lambda^2 (i\lambda - \omega_{01}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_{1n}}{i\lambda - \tilde{\lambda}_{1n}}, \quad \tilde{a}_1 = m_1 c_1$$

Слід зазначати, що при відсутності рідини ($\rho_1 = 0$) і пружності у нерухомій точці ($k_1 = 0$) рівняння (2.12) збігається з характеристичним рівнянням роботи [86].

2.3 Характеристичне рівняння збуреного руху з урахуванням основного тону коливання ідеальної рідини

Як було зазначено у першому розділі, у більшості практично важливих випадках, основний ефект впливу рідини на рух твердого тіла можна врахувати, розглядаючи лише основний тон коливання рідини ($n=1$). У роботах [66 – 69, 147] було оцінено вплив більш високих тонів на стійкість обертання твердого тіла з циліндричною та конусною порожнинами і показано, що за певних умов добавляння нових тонів коливань рідини призводить до незначної кількісної зміни області нестійкості. Слід також відзначити, що у разі еліпсоїдних порожнин та порожнин, утворених софокусними еліпсоїдами з нескінченного спектру власних частот λ_{in} на рух твердого тіла впливає лише основна частота λ_{i1} ($E_{in} = 0$ при $n \neq 1$) [66 – 69, 147].

Рівняння (2.12) з урахуванням основного тону коливання рідини ($n=1$) записується у вигляді полінома 6-го ступеня відносно λ :

$$a_6 \lambda^6 + (a_5 + ib_5) \lambda^5 + \dots + (a_1 + ib_1) \lambda + a_0 + ib_0 = 0. \quad (2.13)$$

Тут

$$a_6 = A_1^* A_2^* - \mu^2, \quad a_5 = A_2^* D_1 + A_1^* D_2, \\ b_5 = [A_2^* A_1' - \mu^2] \tilde{\lambda}_1 + [A_1^* A_2' - \mu^2] \tilde{\lambda}_2 + C_1^* A_2^* + C_2^* A_1^*,$$

$$\begin{aligned}
a_4 &= -\left(A'_1 A'_2 - \mu^2\right) \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 - \left(C_2^* A'_1 + A_2^* \tilde{C}_1\right) \tilde{\lambda}_1 - \left(C_1^* A'_2 + A_1^* \tilde{C}_2\right) \tilde{\lambda}_2 + \\
&\quad + \left(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g\right) A_2^* + \left(k_2 - \tilde{a}_2 g\right) A_1^* - C_1^* C_2^* + D_1 D_2, \\
b_4 &= \left[A_2^* D_1 + A'_1 D_2\right] \tilde{\lambda}_1 + \left[A'_2 D_1 + A_1^* D_2\right] \tilde{\lambda}_2 + C_2^* D_1 + C_1^* D_2 + A_2^* P_1 + A_1^* P_2, \\
a_3 &= -\left[\tilde{C}_1 D_2 + C_2^* D_1 + A_2^* P_1 + A'_1 P_2\right] \tilde{\lambda}_1 - \left[C_1^* D_2 + \tilde{C}_2 D_1 + A'_2 P_1 + A_1^* P_2\right] \tilde{\lambda}_2 - \\
&\quad - \left[A'_1 D_2 + A'_2 D_1\right] \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 + \left(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g\right) D_2 + \left(k_2 - \tilde{a}_2 g\right) D_1 - C_2^* P_1 - C_1^* P_2, \\
b_3 &= -\left[C_2^* \tilde{C}_1 - \left(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g\right) A_2^* - \left(k_2 - \tilde{a}_2 g\right) A'_1 - D_1 D_2\right] \tilde{\lambda}_1 - \\
&\quad - \left[C_1^* \tilde{C}_2 - \left(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g\right) A'_2 - \left(k_2 - \tilde{a}_2 g\right) A_1^* - D_1 D_2\right] \tilde{\lambda}_2 - \\
&\quad - \left[A'_1 \tilde{C}_2 + A'_2 \tilde{C}_1\right] \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 + \left(k_2 - \tilde{a}_2 g\right) C_1^* + \left(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g\right) C_2^* + D_1 P_2 + D_2 P_1, \\
a_2 &= \left(k_2 - \tilde{a}_2 g\right) \left(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g\right) - P_1 P_2 - \\
&\quad - \left[\left(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g\right) C_2^* + \left(k_2 - \tilde{a}_2 g\right) \tilde{C}_1 + D_1 P_2 + D_2 P_1\right] \tilde{\lambda}_1 - \\
&\quad - \left[\left(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g\right) \tilde{C}_2 + \left(k_2 - \tilde{a}_2 g\right) C_1^* + D_1 P_2 + D_2 P_1\right] \tilde{\lambda}_2 - \\
&\quad - \left[\left(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g\right) A'_2 + \left(k_2 - \tilde{a}_2 g\right) A'_1 - \tilde{C}_1 \tilde{C}_2 + D_1 D_2\right] \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2, \\
b_2 &= \left[\left(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g\right) D_2 + \left(k_2 - \tilde{a}_2 g\right) D_1 - \tilde{C}_1 P_2 - C_2^* P_1\right] \tilde{\lambda}_1 + \\
&\quad + \left[\left(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g\right) D_2 + \left(k_2 - \tilde{a}_2 g\right) D_1 - \tilde{C}_2 P_1 - C_1^* P_2\right] \tilde{\lambda}_2 - \\
&\quad - \left[A'_1 P_2 + A'_2 P_1 + \tilde{C}_1 D_2 + \tilde{C}_2 D_1\right] \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 + \\
&\quad + \left(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g\right) P_2 + \left(k_2 - \tilde{a}_2 g\right) P_1, \\
a_1 &= -\left[\left(k_2 - \tilde{a}_2 g\right) P_1 + \left(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g\right) P_2\right] \left(\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2\right) - \\
&\quad - \left[\left(k_2 - \tilde{a}_2 g\right) D_1 + \left(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g\right) D_2 - \tilde{C}_1 P_2 - \tilde{C}_2 P_1\right] \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2, \\
b_1 &= \left[\left(k_2 - \tilde{a}_2 g\right) \left(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g\right) - P_1 P_2\right] \left(\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2\right) - \\
&\quad - \left[\left(k_2 - \tilde{a}_2 g\right) \tilde{C}_1 + \left(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g\right) \tilde{C}_2 + D_1 P_2 + D_2 P_1\right] \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2, \\
a_0 &= -\left[\left(k_2 - \tilde{a}_2 g\right) \left(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g\right) - P_1 P_2\right] \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2, \\
b_0 &= -\left[\left(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g\right) P_2 + \left(k_2 - \tilde{a}_2 g\right) P_1\right] \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2. \\
A_i^* &= A'_i - E_i > 0, C_i^* = \tilde{C}_i - \tilde{E}_i > 0, \tilde{\lambda}_{i1} = \tilde{\lambda}_i, E_i = E_{i1}, D_i = D_{i1}.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Таким чином, характеристичне рівняння (2.13) є точним для еліпсоїдальних і софокусно-еліпсоїдальних порожнин і наближеним для всіх інших осесиметричних

порожнин для уточнення яких слід враховувати додаткові тони коливання ідеальної рідини [109] .

Рівняння (2.13) включає в себе низку частинних випадків, які мають і самостійний науковий та практичний інтерес:

- випадок відсутності рідини в першому твердому тілі ($\rho_1 = 0$), у другому ($\rho_2 = 0$) або у двох твердих тіл ($\rho_1 = \rho_2 = 0$)
- випадок відсутності постійних моментів у інерційній системі відліку ($Q_1 = Q_2 = 0$)
- випадок відсутності постійних моментів у неінерційній системі відліку ($P_1 = P_2 = 0$)
- випадок універсального пружного шарніру (шарніру Гука) ($k_2 \neq 0, \omega_{01} = \omega_{02} = \omega$)

2.3.1 Випадок відсутності рідини в першому твердому тілі ($\rho_1 = 0$), у другому ($\rho_2 = 0$) або у двох твердих тіл ($\rho_1 = \rho_2 = 0$)

Випадок відсутності рідини в першому твердому тілі ($\rho_1 = 0$ див. Рис.2.2) впливає з формул (2.13) – (2.14) в яких потрібно покласти $\tilde{\lambda}_1 = E_1 = 0$. В цьому випадку маємо $a_0 = 0, b_0 = 0$ і рівняння (2.13) отримує вигляд

$$a_6 \lambda^5 + (a_5 + ib_5) \lambda^4 + \dots + (a_2 + ib_2) \lambda + a_1 + ib_1 = 0, \quad (2.15)$$

де

$$\begin{aligned} a_6 &= A_1' A_2^* - \mu^2, \quad a_5 = A_2^* D_1 + A_1' D_2, \quad b_5 = [A_1' A_2' - \mu^2] \tilde{\lambda}_2 + \tilde{C}_1 A_2^* + C_2^* A_1', \\ a_4 &= -(\tilde{C}_1 A_2' + A_1' \tilde{C}_2) \tilde{\lambda}_2 + (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) A_2^* + (k_2 - \tilde{a}_2 g) A_1' - \tilde{C}_1 C_2^* + D_1 D_2, \\ b_4 &= [A_2' D_1 + A_1' D_2] \tilde{\lambda}_2 + C_2^* D_1 + \tilde{C}_1 D_2 + A_2^* P_1 + A_1' P_2, \\ a_3 &= -[\tilde{C}_1 D_2 + \tilde{C}_2 D_1 + A_2' P_1 + A_1' P_2] \tilde{\lambda}_2 + \\ &\quad + (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) D_2 + (k_2 - \tilde{a}_2 g) D_1 - C_2^* P_1 - \tilde{C}_1 P_2, \\ b_3 &= -[\tilde{C}_1 \tilde{C}_2 - (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) A_2' - (k_2 - \tilde{a}_2 g) A_1' - D_1 D_2] \tilde{\lambda}_2 + \\ &\quad + (k_2 - \tilde{a}_2 g) \tilde{C}_1 + (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) C_2^* + D_1 P_2 + D_2 P_1 \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned}
a_2 &= (k_2 - \tilde{a}_2 g)(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) - P_1 P_2 - \\
&\quad - \left[(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) \tilde{C}_2 + (k_2 - \tilde{a}_2 g) \tilde{C}_1 + D_1 P_2 + D_2 P_1 \right] \tilde{\lambda}_2, \\
b_2 &= \left[(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) D_2 + (k_2 - \tilde{a}_2 g) D_1 - \tilde{C}_2 P_1 - \tilde{C}_1 P_2 \right] \tilde{\lambda}_2 + \\
&\quad + (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) P_2 + (k_2 - \tilde{a}_2 g) P_1 \\
a_1 &= - \left[(k_2 - \tilde{a}_2 g) P_1 + (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) P_2 \right] \tilde{\lambda}_2, \\
b_1 &= \left[(k_2 - \tilde{a}_2 g)(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) - P_1 P_2 \right] \tilde{\lambda}_2.
\end{aligned}$$

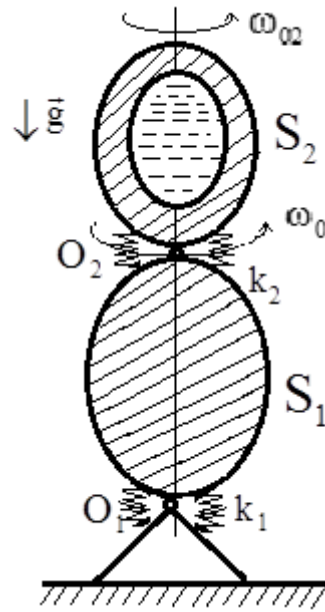


Рис. 2.2 – Система двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа з рідиною у верхньому твердому тілі

Випадок відсутності рідини в другому твердому тілі ($\rho_2 = 0$ див. Рис.2.3) також впливає з формул (2.13) – (2.14) в яких потрібно покласти $\tilde{\lambda}_2 = E_2 = 0$. В цьому випадку, як і раніше, також маємо $a_0 = 0$, $b_0 = 0$ і рівняння (2.13) отримує вигляд (2.15), де

$$\begin{aligned}
a_6 &= A_1^* A_2' - \mu^2, \quad a_5 = A_2' D_1 + A_1^* D_2, \quad b_5 = \left[A_2' A_1' - \mu^2 \right] \tilde{\lambda}_1 + C_1^* A_2' + \tilde{C}_2 A_1^*, \\
a_4 &= - \left(\tilde{C}_2 A_1' + A_2' \tilde{C}_1 \right) \tilde{\lambda}_1 + (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) A_2' + (k_2 - \tilde{a}_2 g) A_1^* - C_1^* \tilde{C}_2 + D_1 D_2, \\
b_4 &= \left[A_2' D_1 + A_1^* D_2 \right] \tilde{\lambda}_1 + \tilde{C}_2 D_1 + C_1^* D_2 + A_2' P_1 + A_1^* P_2, \\
a_3 &= - \left[\tilde{C}_1 D_2 + \tilde{C}_2 D_1 + A_2' P_1 + A_1^* P_2 \right] \tilde{\lambda}_1 + \\
&\quad + (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) D_2 + (k_2 - \tilde{a}_2 g) D_1 - \tilde{C}_2 P_1 - C_1^* P_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_3 = & -\left[\tilde{C}_2\tilde{C}_1 - (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1g)A'_2 - (k_2 - \tilde{a}_2g)A'_1 - D_1D_2\right]\tilde{\lambda}_1 + \\
& + (k_2 - \tilde{a}_2g)C_1^* + (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1g)\tilde{C}_2 + D_1P_2 + D_2P_1 \\
a_2 = & (k_2 - \tilde{a}_2g)(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1g) - P_1P_2 - \\
& - \left[(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1g)\tilde{C}_2 + (k_2 - \tilde{a}_2g)\tilde{C}_1 + D_1P_2 + D_2P_1\right]\tilde{\lambda}_1', \\
b_2 = & \left[(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1g)D_2 + (k_2 - \tilde{a}_2g)D_1 - \tilde{C}_1P_2 - \tilde{C}_2P_1\right]\tilde{\lambda}_1 + \\
& + (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1g)P_2 + (k_2 - \tilde{a}_2g)P_1 \\
a_1 = & -\left[(k_2 - \tilde{a}_2g)P_1 + (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1g)P_2\right]\tilde{\lambda}_1, \\
b_1 = & \left[(k_2 - \tilde{a}_2g)(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1g) - P_1P_2\right]\tilde{\lambda}_1.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

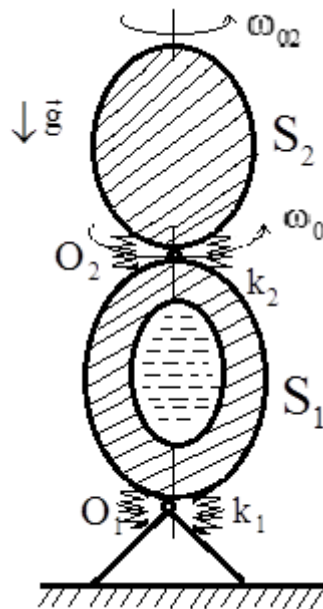


Рис. 2.3 – Система двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа з рідиною у нижньому твердому тілі

У випадку відсутності рідини в обох твердих тіл ($\rho_1 = 0, \rho_2 = 0$ див. Рис.2.4) рівняння (2.13) має четверту степінь. В цьому випадку, як і раніше, в коефіцієнтах (2.14) потрібно покласти $\tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_2 = E_1 = E_2 = 0$ ($a_0 = a_1 = b_0 = b_1 = 0$) і рівняння (2.13) отримує вигляд:

$$a_6\lambda^4 + (a_5 + ib_5)\lambda^3 + \dots + (a_3 + ib_3)\lambda + a_2 + ib_2 = 0, \tag{2.18}$$

де

$$a_6 = A'_1A'_2 - \mu^2, \quad a_5 = A'_2D_1 + A'_1D_2, \quad b_5 = C_1^*A'_2 + \tilde{C}_2A'_1,$$

$$\begin{aligned}
a_4 &= (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) A'_2 + (k_2 - \tilde{a}_2 g) A'_1 - \tilde{C}_1 \tilde{C}_2 + D_1 D_2, \\
b_4 &= \tilde{C}_2 D_1 + \tilde{C}_1 D_2 + A'_2 P_1 + A'_1 P_2, \\
a_3 &= (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) D_2 + (k_2 - \tilde{a}_2 g) D_1 - \tilde{C}_2 P_1 - \tilde{C}_1 P_2, \\
b_3 &= (k_2 - \tilde{a}_2 g) \tilde{C}_1 + (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) \tilde{C}_2 + D_1 P_2 + D_2 P_1, \\
a_2 &= (k_2 - \tilde{a}_2 g) (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) - P_1 P_2, \quad b_2 = (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) P_2 + (k_2 - \tilde{a}_2 g) P_1.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

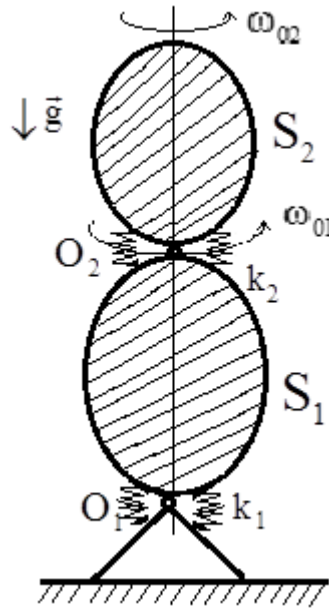


Рис. 2.4 – Система двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа

2.3.2 Випадок відсутності постійних моментів у неінерційній системі відліку ($Q_1 = Q_2 = 0$)

У цьому випадку $Q_1 = Q_2 = 0$ і степінь рівняння (2.13) не змінюється потрібно

тільки перерахувати кінетичний момент $\tilde{C}_i = C_i \omega_{0i} = \frac{P_i}{D_{i3}}$

$$a_6 \lambda^6 + (a_5 + i b_5) \lambda^5 + \dots + (a_1 + i b_1) \lambda + a_0 + i b_0 = 0. \tag{2.20}$$

Тут

$$\begin{aligned}
a_6 &= A_1^* A_2^* - \mu^2, \quad a_5 = A_2^* D_1 + A_1^* D_2, \\
b_5 &= [A_2^* A'_1 - \mu^2] \tilde{\lambda}_1 + [A_1^* A'_2 - \mu^2] \tilde{\lambda}_2 + C_1^* A_2^* + C_2^* A_1^*, \\
a_4 &= -(A_1^* A'_2 - \mu^2) \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 - (C_2^* A'_1 + A_2^* \tilde{C}_1) \tilde{\lambda}_1 - (C_1^* A'_2 + A_1^* \tilde{C}_2) \tilde{\lambda}_2 + \\
&\quad + (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) A_2^* + (k_2 - \tilde{a}_2 g) A_1^* - C_1^* C_2^* - D_1 D_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_4 &= [A_2^* D_1 + A_1' D_2] \tilde{\lambda}_1 + [A_2' D_1 + A_1^* D_2] \tilde{\lambda}_2 + C_2^* D_1 + C_1^* D_2 + A_2^* P_1 + A_1^* P_2, \\
a_3 &= -[\tilde{C}_1 D_2 + C_2^* D_1 + A_2^* P_1 + A_1' P_2] \tilde{\lambda}_1 - [C_1^* D_2 + \tilde{C}_2 D_1 + A_2' P_1 + A_1^* P_2] \tilde{\lambda}_2 - \\
&\quad - [A_1' D_2 + A_2' D_1] \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 + (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) D_2 + (k_2 - \tilde{a}_2 g) D_1 - C_2^* P_1 - C_1^* P_2, \\
b_3 &= -[C_2^* \tilde{C}_1 - (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) A_2^* - (k_2 - \tilde{a}_2 g) A_1' - D_1 D_2] \tilde{\lambda}_1 - \\
&\quad - [C_1^* \tilde{C}_2 - (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) A_2' - (k_2 - \tilde{a}_2 g) A_1^* - D_1 D_2] \tilde{\lambda}_2 - \\
&\quad - [A_1' \tilde{C}_2 + A_2' \tilde{C}_1] \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 + (k_2 - \tilde{a}_2 g) C_1^* + (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) C_2^* + D_1 P_2 + D_2 P_1 \\
&\quad a_2 = (k_2 - \tilde{a}_2 g)(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) - P_1 P_2 - \\
&\quad - [(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) C_2^* + (k_2 - \tilde{a}_2 g) \tilde{C}_1 + D_1 P_2 + D_2 P_1] \tilde{\lambda}_1 - \\
&\quad - [(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) \tilde{C}_2 + (k_2 - \tilde{a}_2 g) C_1^* + D_1 P_2 + D_2 P_1] \tilde{\lambda}_2 - \\
&\quad - [(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) A_2' + (k_2 - \tilde{a}_2 g) A_1' - \tilde{C}_1 \tilde{C}_2 + D_1 D_2] \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 \\
b_2 &= [(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) D_2 + (k_2 - \tilde{a}_2 g) D_1 - \tilde{C}_1 P_2 - C_2^* P_1] \tilde{\lambda}_1 + \\
&\quad + [(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) D_2 + (k_2 - \tilde{a}_2 g) D_1 - \tilde{C}_2 P_1 - C_1^* P_2] \tilde{\lambda}_2 - \\
&\quad - [A_1' P_2 + A_2' P_1 + \tilde{C}_1 D_2 + \tilde{C}_2 D_1] \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 + (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) P_2 + (k_2 - \tilde{a}_2 g) P_1 \\
a_1 &= -[(k_2 - \tilde{a}_2 g) P_1 + (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) P_2] (\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2) - \\
&\quad - [(k_2 - \tilde{a}_2 g) D_1 + (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) D_2 - \tilde{C}_1 P_2 - \tilde{C}_2 P_1] \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2, \\
b_1 &= [(k_2 - \tilde{a}_2 g)(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) - P_1 P_2] (\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2) - \\
&\quad - [(k_2 - \tilde{a}_2 g) \tilde{C}_1 + (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) \tilde{C}_2 + D_1 P_2 + D_2 P_1] \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2, \\
a_0 &= -[(k_2 - \tilde{a}_2 g)(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) - P_1 P_2] \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2, \\
b_0 &= -[(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) P_2 + (k_2 - \tilde{a}_2 g) P_1] \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2.
\end{aligned}
\tag{2.21}$$

$$A_i^* = A_i' - E_i > 0, C_i^* = \tilde{C}_i - \tilde{E}_i > 0, \tilde{\lambda}_{i1} = \tilde{\lambda}_i, E_i = E_{i1}, D_i = D_{i1}.$$

2.3.3 Випадок відсутності постійних моментів у інерційній системі відліку ($P_1 = P_2 = 0$)

У цьому випадку $P_1 = P_2 = 0$ і степінь рівняння (2.13) не змінюється

$$a_6 \lambda^6 + (a_5 + i b_5) \lambda^5 + \dots + (a_1 + i b_1) \lambda + a_0 + i b_0 = 0. \tag{2.22}$$

Тут

$$\begin{aligned}
a_6 &= A_1^* A_2^* - \mu^2, a_5 = A_2^* D_1 + A_1^* D_2, \\
b_5 &= [A_2^* A_1' - \mu^2] \tilde{\lambda}_1 + [A_1^* A_2' - \mu^2] \tilde{\lambda}_2 + C_1^* A_2^* + C_2^* A_1^*, \\
a_4 &= -(A_1' A_2' - \mu^2) \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 - (C_2^* A_1' + A_2^* \tilde{C}_1) \tilde{\lambda}_1 - (C_1^* A_2' + A_1^* \tilde{C}_2) \tilde{\lambda}_2 + \\
&\quad + (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) A_2^* + (k_2 - \tilde{a}_2 g) A_1^* - C_1^* C_2^* + D_1 D_2, \\
b_4 &= -[A_2^* D_1 + A_1' D_2] \tilde{\lambda}_1 + [A_2' D_1 + A_1^* D_2] \tilde{\lambda}_2 + C_2^* D_1 + C_1^* D_2, \\
a_3 &= -[\tilde{C}_1 D_2 + C_2^* D_1] \tilde{\lambda}_1 - [C_1^* D_2 + \tilde{C}_2 D_1] \tilde{\lambda}_2 - \\
&\quad - [A_1' D_2 + A_2' D_1] \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 + (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) D_2 + (k_2 - \tilde{a}_2 g) D_1, \\
b_3 &= -[C_2^* \tilde{C}_1 - (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) A_2^* - (k_2 - \tilde{a}_2 g) A_1' - D_1 D_2] \tilde{\lambda}_1 - \\
&\quad - [C_1^* \tilde{C}_2 - (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) A_2' - (k_2 - \tilde{a}_2 g) A_1^* - D_1 D_2] \tilde{\lambda}_2 - , \\
&\quad - [A_1' \tilde{C}_2 + A_2' \tilde{C}_1] \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 + (k_2 - \tilde{a}_2 g) C_1^* + (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) C_2^* \\
a_2 &= (k_2 - \tilde{a}_2 g)(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) - [(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) C_2^* + (k_2 - \tilde{a}_2 g) \tilde{C}_1] \tilde{\lambda}_1 - \\
&\quad - [(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) \tilde{C}_2 + (k_2 - \tilde{a}_2 g) C_1^*] \tilde{\lambda}_2 - , \\
&\quad - [(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) A_2' + (k_2 - \tilde{a}_2 g) A_1' - \tilde{C}_1 \tilde{C}_2 + D_1 D_2] \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 \\
b_2 &= [(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) D_2 + (k_2 - \tilde{a}_2 g) D_1] (\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2) - [\tilde{C}_1 D_2 + \tilde{C}_2 D_1] \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2, \\
a_1 &= -[(k_2 - \tilde{a}_2 g) D_1 + (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) D_2] \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2, \\
b_1 &= (k_2 - \tilde{a}_2 g)(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) (\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2) - \\
&\quad - [(k_2 - \tilde{a}_2 g) \tilde{C}_1 + (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) \tilde{C}_2] \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2, \\
a_0 &= -(k_2 - \tilde{a}_2 g)(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2, b_0 = 0, \\
A_i^* &= A_i' - E_i > 0, C_i^* = \tilde{C}_i - \tilde{E}_i > 0, \tilde{\lambda}_{i1} = \tilde{\lambda}_i, E_i = E_{i1}, D_i = D_{i1}.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

2.3.4 Випадок універсального пружного шарніру (шарніру Гука) ($\omega_{01} = \omega_{02} = \omega$)

У цьому випадку $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega$ і степінь рівняння (2.13) не змінюється

$$a_6 \lambda^6 + (a_5 + i b_5) \lambda^5 + \dots + (a_1 + i b_1) \lambda + a_0 + i b_0 = 0. \tag{2.24}$$

Тут

$$\begin{aligned}
a_6 &= A_1^* A_2^* - \mu^2, a_5 = A_2^* D_1 + A_1^* D_2, \\
b_5 &= [A_2^* A_1' - \mu^2] \tilde{\lambda}_1 + [A_1^* A_2' - \mu^2] \tilde{\lambda}_2 + C_1^* A_2^* + C_2^* A_1^*, \\
a_4 &= -(A_1' A_2' - \mu^2) \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 - (C_2^* A_1' + A_2^* \tilde{C}_1) \tilde{\lambda}_1 - (C_1^* A_2' + A_1^* \tilde{C}_2) \tilde{\lambda}_2 + \\
&\quad + (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) A_2^* + (k_2 - \tilde{a}_2 g) A_1^* - C_1^* C_2^* + D_1 D_2, \\
b_4 &= [A_2^* D_1 + A_1' D_2] \tilde{\lambda}_1 + [A_2' D_1 + A_1^* D_2] \tilde{\lambda}_2 + C_2^* D_1 + C_1^* D_2 + A_2^* P_1 + A_1^* P_2, \\
a_3 &= -[\tilde{C}_1 D_2 + C_2^* D_1 + A_2^* P_1 + A_1' P_2] \tilde{\lambda}_1 - [C_1^* D_2 + \tilde{C}_2 D_1 + A_2' P_1 + A_1^* P_2] \tilde{\lambda}_2 - \\
&\quad - [A_1' D_2 + A_2' D_1] \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 + (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) D_2 + (k_2 - \tilde{a}_2 g) D_1 - C_2^* P_1 - C_1^* P_2, \\
b_3 &= -[C_2^* \tilde{C}_1 - (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) A_2^* - (k_2 - \tilde{a}_2 g) A_1' - D_1 D_2] \tilde{\lambda}_1 - \\
&\quad - [C_1^* \tilde{C}_2 - (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) A_2' - (k_2 - \tilde{a}_2 g) A_1^* - D_1 D_2] \tilde{\lambda}_2 - \\
&\quad - [A_1' \tilde{C}_2 + A_2' \tilde{C}_1] \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 + (k_2 - \tilde{a}_2 g) C_1^* + (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) C_2^* + D_1 P_2 + D_2 P_1, \\
a_2 &= (k_2 - \tilde{a}_2 g)(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) - P_1 P_2 - \\
&\quad - [(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) C_2^* + (k_2 - \tilde{a}_2 g) \tilde{C}_1 + D_1 P_2 + D_2 P_1] \tilde{\lambda}_1 - \\
&\quad - [(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) \tilde{C}_2 + (k_2 - \tilde{a}_2 g) C_1^* + D_1 P_2 + D_2 P_1] \tilde{\lambda}_2 - \\
&\quad - [(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) A_2' + (k_2 - \tilde{a}_2 g) A_1' - \tilde{C}_1 \tilde{C}_2 + D_1 D_2] \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2, \\
b_2 &= [(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) D_2 + (k_2 - \tilde{a}_2 g) D_1 - \tilde{C}_1 P_2 - C_2^* P_1] \tilde{\lambda}_1 + \\
&\quad + [(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) D_2 + (k_2 - \tilde{a}_2 g) D_1 - \tilde{C}_2 P_1 - C_1^* P_2] \tilde{\lambda}_2 - \\
&\quad - [A_1' P_2 + A_2' P_1 + \tilde{C}_1 D_2 + \tilde{C}_2 D_1] \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 + (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) P_2 + (k_2 - \tilde{a}_2 g) P_1, \\
a_1 &= -[(k_2 - \tilde{a}_2 g) P_1 + (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) P_2] (\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2) - \\
&\quad - [(k_2 - \tilde{a}_2 g) D_1 + (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) D_2 - \tilde{C}_1 P_2 - \tilde{C}_2 P_1] \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2, \\
b_1 &= [(k_2 - \tilde{a}_2 g)(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) - P_1 P_2] (\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2) - \\
&\quad - [(k_2 - \tilde{a}_2 g) \tilde{C}_1 + (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) \tilde{C}_2 + D_1 P_2 + D_2 P_1] \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2, \\
a_0 &= -[(k_2 - \tilde{a}_2 g)(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) - P_1 P_2] \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2, \\
b_0 &= -[(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) P_2 + (k_2 - \tilde{a}_2 g) P_1] \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

2.4 Випадок відсутності дисипації ($D_{i1} = D_{i2} = D_{i3} = 0$) і постійних моментів ($P_1 = P_2 = Q_1 = Q_2 = 0$)

В цьому випадку тверде тіло S_i і рідина в незбуреному русі рівномірно обертаються з кутовою швидкістю $r_i = \omega_{0i}$.

Розглянемо випадок відсутності дисипативних ($D_{ij} = 0, i=1,2; j=1,3$) і постійних ($P_i = Q_i = 0$) моментів. У цьому випадку система рівнянь (2.2) – (2.5) допускає розв'язки (2.6), де $r_i = \omega_{0i}$, а характеристичне рівняння (2.12) при $a_2 = a_4 = b_3 = b_1 = 0$ матиме вид:

$$a_5 \lambda^5 + i b_4 \lambda^4 + a_3 \lambda^3 + i b_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + i b_0 = 0. \quad (2.26)$$

Коефіцієнти рівняння (2.18) визначаються за формулами (2.14) в яких потрібно покласти $D_i = 0$ та $P_i = Q_i = 0$.

Стійкість консервативних систем визначаються тим, що корені рівняння (2.26) повинні знаходитися на уявній осі. Для цього в рівнянні (2.26) покладемо $\lambda = i\sigma$ і це рівняння матиме вигляд:

$$a_6 \sigma^6 + b_5 \sigma^5 - a_4 \sigma^4 - b_3 \sigma^3 + a_2 \sigma^2 + b_1 \sigma - a_0 = 0, \quad (2.27)$$

2.5 Висновки до розділу 2

У другому розділі наведено постановку задачі про рух у середовищі з опором невільної системи двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа з нестисливою рідиною. На підставі рівнянь руху систем зв'язаних гіростатів П.В. Харламова виведені рівняння руху у середовищі з опором двох пружно зв'язаних гіростатів. На основі функції стану С.Л. Соболева для ідеальної обертової рідини виведені рівняння руху рідини у двох пружно зв'язаних гіроскопах Лагранжа з довільними осесиметричними порожнинами, та одержано трансцendentне характеристичне рівняння збурених рівномірних обертань двох гіроскопів Лагранжа з рідиною. З урахуванням основного тону коливання ідеальної рідини отримано характеристичне рівняння у вигляді полінома шостого степеня. Розглянуто низка частих випадків цього характеристичного рівняння, які мають і самостійний науковий і практичний інтерес:

- випадок відсутності рідини в першому твердому тілі ($\rho_1 = 0$), у другому ($\rho_2 = 0$) або у двох твердих тіл ($\rho_1 = \rho_2 = 0$)
- випадок відсутності постійних моментів у інерційній системі відліку ($Q_1 = Q_2 = 0$)
- випадок відсутності постійних моментів у неінерційній системі відліку ($P_1 = P_2 = 0$)
- випадок універсального пружного шарніру (шарніру Гука) ($k_2 \neq 0, \omega_{01} = \omega_{02} = \omega$)
- випадок відсутності дисипації ($D_{i1} = D_{i2} = D_{i3} = 0$) і постійних моментів ($P_1 = P_2 = Q_1 = Q_2 = 0$).
- Слід зазнати, що отримано характеристичне рівняння є точним для еліпсоїдальних і софокусно-еліпсоїдальних порожнин і наближеним для всіх інших осесиметричних порожнин для уточнення якого слід враховувати додаткові тони коливання ідеальної рідини .

РОЗДІЛ 3

АСИМПТОТИЧНА СТІЙКІСТЬ РІВНОМІРНИХ ОБЕРТАНЬ У СЕРЕДОВИЩІ З ОПОРОМ СИСТЕМИ ДВОХ ПРУЖНО ЗВ'ЯЗАНИХ ГІРОСКОПІВ ЛАГРАНЖА

У даному розділі на підставі характеристичного рівняння (2.18), виведеного у другому розділі і на основі критерія Ляпунова-Шіпара, записаного у інваріантному вигляді, отримані та аналітично досліджені умови асимптотичної стійкості рівномірних обертань у середовищі з опором системи двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа. Ці умови представлені у вигляді системи трьох нерівностей. Розглянуто можливість стабілізації нестійкого рівномірного обертання в середовищі з опором гіроскопа Лагранжа за допомогою другого гіроскопа, якій обертається, та знаходиться над ним. Стабілізація буде неможлива при збігу центру мас другого гіроскопа з їх загальною точкою з першим гіроскопом. Отримано у вигляді системи трьох нерівностей умови стабілізації. Виписано достатні умови на коефіцієнти пружності шарнірів, при яких старші коефіцієнти цих нерівностей додатні. Звідки випливає, що стабілізація завжди буде можлива при досить великій кутовій швидкості обертання другого гіроскопа та за рахунок збільшення значень коефіцієнтів пружності. Проведено порівняння отриманих умов стабілізації з аналогічними умовами при відсутності дисипації. Розглянуто задачу про стійкість рівномірних обертань на підвісі гіроскопа Лагранжа в середовищі з опором. Проведено аналітичні дослідження впливу дисипації, постійних моментів, пружності шарнірів, масових та інерційних характеристик підвіски на умови стійкості. Отримані умови стійкості порівнюються з аналогічними при відсутності дисипації та постійних моментів.

3.1 Умови асимптотичної стійкості рівномірних обертань у середовищі з опором системи двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа

У другому розділі було показано, що у випадку відсутності рідини в обох твердих тілах ($\rho_1 = 0, \rho_2 = 0$, див. Рис.3.1) характеристичне рівняння має вигляд (2.18).

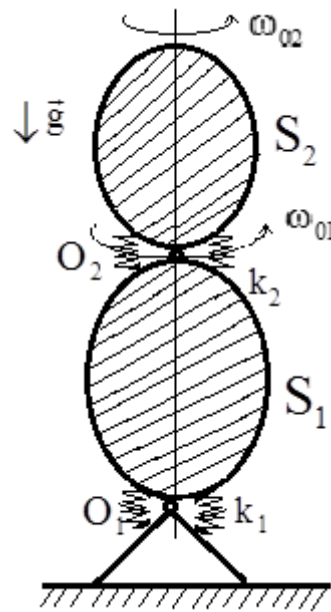


Рис. 3.1 – Система двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа

Для подальшого зручніше переписати це рівняння наступним чином:

$$a_4 \lambda^4 + (a_3 + ib_3) \lambda^3 + \dots + (a_1 + ib_1) \lambda + a_0 + ib_0 = 0. \quad (3.1)$$

де коефіцієнти цього рівняння мають вигляд:

$$\begin{aligned} a_4 &= A'_1 A'_2 - \mu^2, \quad a_3 = A'_2 D_1 + A'_1 D_2, \quad b_3 = C_1^* A'_2 + \tilde{C}_2 A'_1, \\ a_2 &= (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) A'_2 + (k_2 - \tilde{a}_2 g) A'_1 - \tilde{C}_1 \tilde{C}_2 + D_1 D_2, \\ b_2 &= \tilde{C}_2 D_1 + \tilde{C}_1 D_2 + A'_2 P_1 + A'_1 P_2, \\ a_1 &= (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) D_2 + (k_2 - \tilde{a}_2 g) D_1 - \tilde{C}_2 P_1 - \tilde{C}_1 P_2, \\ b_1 &= (k_2 - \tilde{a}_2 g) \tilde{C}_1 + (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) \tilde{C}_2 + D_1 P_2 + D_2 P_1, \\ a_0 &= (k_2 - \tilde{a}_2 g)(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) - P_1 P_2, \quad b_0 = (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) P_2 + (k_2 - \tilde{a}_2 g) P_1. \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\omega_{0i} = (P_i + Q_i) / D_{i3}.$$

Дослідження характеристичного рівняння (3.1) будемо проводити за допомогою інваріантного підходу. Згідно критерію Ляпунова–Шіпара, записаного в інваріантному вигляді [65], для того, щоб всі нулі рівняння (3.1) лежали у відкритій лівій півплощині, необхідно і достатньо, щоб матриця сьомого порядку, складена з коефіцієнтів цього рівняння, була інваріантно-позитивною, тобто були позитивно визначені матриці $\Delta_1, \Delta_3, \Delta_5$ і Δ_7 :

$$I_1 = |\Delta_1| = a_3 > 0, \quad (3.3)$$

$$I_3 = |\Delta_3| = \begin{vmatrix} a_4 & -b_3 & -a_2 \\ 0 & a_3 & -b_2 \\ a_3 & -b_2 & -a_1 \end{vmatrix} > 0, \quad (3.4)$$

$$I_5 = |\Delta_5| = \begin{vmatrix} a_4 & -b_3 & -a_2 & b_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & -b_3 & -a_2 & b_1 \\ 0 & 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 \\ 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 & b_0 \\ a_3 & -b_2 & -a_1 & b_0 & 0 \end{vmatrix} > 0, \quad (3.5)$$

$$I_7 = |\Delta_7| = \begin{vmatrix} a_4 & -b_3 & -a_2 & b_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & -b_3 & -a_2 & b_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & -b_3 & -a_2 & b_1 & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 & b_0 \\ 0 & 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 & b_0 & 0 \\ 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 & b_0 & 0 & 0 \\ a_3 & -b_1 & -a_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} > 0. \quad (3.6)$$

Так як $I_1 = a_3 = A'_1 D_2 + A'_2 D_1 > 0$, то асимптотична стійкість рівномірних обертань в середовищі з опором двох гіроскопів Лагранжа, зв'язаних пружним сферичним шарніром, визначається трьома нерівностями (3.4) – (3.6).

3.2 Стабілізація нестійкого обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа за допомогою другого гіроскопа у випадку відсутності постійних моментів в інерціальній системі ($P_1 = P_2 = 0$)

Для консервативних механічних систем ефект стабілізації невідновленого гіроскопа Лагранжа другим обертювим був досліджений в монографії [158] та в багатьох інших роботах [156]. В даному підрозділі на підставі умов стійкості (3.4) – (3.6), записаних відносно кінетичних моментів гіроскопів $\tilde{C}_i$ і коефіцієнтів пружності шарнірів k_i , розглянута задача про можливість стабілізації нестійкого обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа за допомогою другого гіроскопа у випадку відсутності постійних моментів у інерціальній системі відліку ($P_1 = P_2 = 0$).

З нерівності (3.3) видно, що при частковій дисипації ($D_1 = D_2 = 0, D_{i3} \neq 0$) асимптотична стійкість неможлива і стабілізація теж.

Окремо потрібно зазначити, що з рівняння (2.12) слідує, що якщо центр мас другого гіроскопа збігається з точкою O_2 ($c_2 = 0, \tilde{a}_2 = 0, \mu = 0$), в цьому випадку це рівняння розпадається на два рівняння і відсутній взаємовплив першого тіла на друге і стабілізація стає неможливою.

Стабілізувати нестійке рівномірне обертання першого гіроскопа можна за допомогою кінетичного моменту другого гіроскопа $\tilde{C}_2$ ($\tilde{C}_2 = C_2 \omega_{02}$) та коефіцієнтів пружності k_1 і k_2 .

3.2.1 Умови стабілізації за допомогою кінетичного моменту другого гіроскопу ($\tilde{C}_2 = C_2 \omega_{02}$)

Таким чином, умови стабілізації (3.4) – (3.6) відносно кінетичного моменту $\tilde{C}_2$ запишуться так:

$$I_{32} \tilde{C}_2^2 + I_{31} \tilde{C}_2 + I_{30} > 0, \quad (3.7)$$

$$I_{54} \tilde{C}_2^4 + I_{53} \tilde{C}_2^3 + \dots + I_{51} \tilde{C}_2 + I_{50} > 0, \quad (3.8)$$

$$(\tilde{I}_{74} \tilde{C}_2^4 + \tilde{I}_{73} \tilde{C}_2^3 + \dots + \tilde{I}_{71} \tilde{C}_2 + \tilde{I}_{70})(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g)(k_2 - \tilde{a}_2 g) > 0. \quad (3.9)$$

Тут

$$I_{32} = D_1(A_1' \mathcal{D}_2 + \mu^2 D_1) > 0, \quad I_{31} = -2D_1 D_2 \tilde{C}_1(A_1' A_2' - \mu^2),$$

$$I_{54} = D_1^2(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g)(A_1' \mathcal{D}_2 + \mu^2 D_1), \quad (3.10)$$

$$\tilde{I}_{74} = D_1^2 D_2(A_1' A_2' - \mu^2)(A_1' \mathcal{D}_2 + \mu^2 D_1)(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g)^2 > 0,$$

$$I_{74} = (k_2 - \tilde{a}_2 g)(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) \tilde{I}_{74}. \quad (3.11)$$

3.2.2 Умови стабілізації відносно пружності усферичних шарнірів k_1 і k_2

Знайдемо умови для величини коефіцієнтів пружних моментів k_1 та k_2 при яких нерівності (3.27) – (3.9) будуть виконуватись при досить великих значеннях кутової швидкості ω_{02} .

Із (3.10) слідує, що коефіцієнт I_{54} буде додатним при $k_1 + k_2 > \tilde{a}_1 g$, а із (3.11) слідує, що I_{74} буде додатним при $k_2 > \tilde{a}_2 g$.

Таким чином, маємо систему нерівностей:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 > \tilde{a}_1 g, \\ k_2 > \tilde{a}_2 g. \end{cases} \quad (3.12)$$

При виконанні системи нерівностей (3.12) і при досить великих значеннях кутової швидкості другого гіроскопа Лагранжа, можлива стабілізація нестійкого обертання першого гіроскопа другим гіроскопом, який обертається.

Таким чином, при виконанні умов (3.12) старші коефіцієнти в нерівності (3.8) – (3.9) додатні і при досить великих значеннях кутової швидкості ω_{02} можлива стабілізація нестійкого обертання гіроскопа Лагранжа. Коли центр мас другого гіроскопа знаходиться нижче точки O_2 ($c_2 < 0$), то $a_2 < 0$ і стабілізація буде можлива при виконанні умови $k_1 + k_2 > a_1 g$ (див. Рис. 3.2). Із нерівностей (3.12) випливає, що ці нерівності завжди будуть виконані з допомогою збільшення коефіцієнтів пружності k_1 і k_2 .

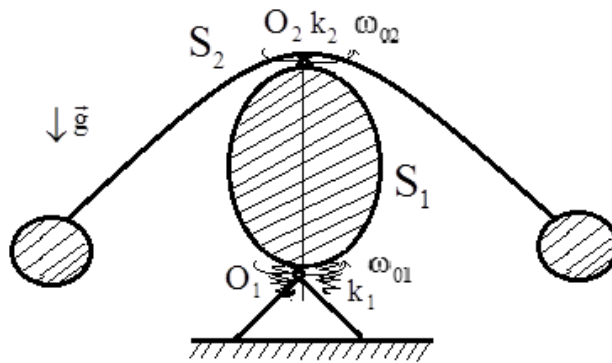


Рис. 3.2 Видозмінена система двох гіроскопів з двома пружними шарнірами

3.2.3 Умови стабілізації при відсутності дисипативних і постійних моментів

Допустимо, що для гіроскопа S_1 не виконується критерій Маєвського, тобто $\omega_{01}^2 < 4A_1' \tilde{a}_1 g / C_1^2$. Чи можна у разі відсутності дисипативного та постійного моментів стабілізувати нестійке обертання цього гіроскопа Лагранжа за допомогою другого гіроскопа, що обертається та пружних моментів.

У разі відсутності дисипативних ($D_{ij} = 0, i = 1, 2; j = 1, 3$) і постійних моментів

($P_i = 0$) будемо мати $a_1 = a_3 = b_2 = 0$ і характеристичне рівняння (3.1) прийме вид:

$$a_4 \lambda^4 + ib_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + ib_1 \lambda + a_0 = 0, \quad (3.13)$$

де коефіцієнти рівняння (3.13) визначаються за формулами (3.2) в яких потрібно покласти $D_i = 0$ та $P_i = 0$.

Стійкість консервативних систем визначаються тим, що корені рівняння (3.13) повинні знаходитися на уявній осі. Для цього в рівнянні (3.13) покладемо $\lambda = i\sigma$ і це рівняння прийме вигляд:

$$a_4 \sigma^4 + b_3 \sigma^3 - a_2 \sigma^2 - b_1 \sigma + a_0 = 0. \quad (3.14)$$

Для того, щоб всі нулі рівняння (3.14) були різні і лежали на дійсній осі, згідно критерію Лъенара – Шіпара, записаного в іннормному вигляді[65 с. 48], необхідно і достатньо, щоб матриця сьомого порядку, яка складена з коефіцієнтів цього рівняння була іннорно-позитивною, тобто щоб були позитивно визначені матриці Δ_1 , Δ_3 , Δ_5 і Δ_7 :

$$I_1 = |\Delta_1| = 4a_4 > 0,$$

$$I_3 = |\Delta_3| = \begin{vmatrix} a_4 & b_3 & -a_2 \\ 0 & 4a_4 & 3b_3 \\ 4a_4 & 3b_3 & -2a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad (3.15)$$

$$I_5 = |\Delta_5| = \begin{vmatrix} a_4 & b_3 & -a_2 & -b_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & b_3 & -a_2 & -b_1 \\ 0 & 0 & 4a_4 & 3b_3 & -2a_2 \\ 0 & 4a_4 & 3b_3 & -2a_2 & -b_1 \\ 4a_4 & 3b_3 & -2a_2 & -b_1 & 0 \end{vmatrix} > 0, \quad (3.16)$$

$$I_7 = |\Delta_7| = \begin{vmatrix} a_4 & b_3 & -a_2 & -b_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & b_3 & -a_2 & -b_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & b_3 & -a_2 & -b_1 & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & 4a_4 & 3b_3 & -2a_2 & -b_1 \\ 0 & 0 & 4a_4 & 3b_3 & -2a_2 & -b_1 & 0 \\ 0 & 4a_4 & 3b_3 & -2a_2 & -b_1 & 0 & 0 \\ 4a_4 & 3b_3 & -2a_2 & -b_1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} > 0. \quad (3.17)$$

Так як $I_1 > 0$, то стійкість рівномірних обертань двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа визначається трьома нерівностями (3.15) – (3.17).

Так як і раніше, стабілізувати нестійке рівномірне обертання першого гіроскопа можна за допомогою кінетичного моменту другого гіроскопа $\tilde{C}_2$ ($\tilde{C}_2 = C_2 \omega_{02}$) та коефіцієнтів пружності сферичних шарнірів k_1 та k_2 .

Таким чином, умови стабілізації відносно кінетичного моменту $\tilde{C}_2$ запишуться так:

$$I_{32}\tilde{C}_2^2 + I_{31}\tilde{C}_2 + I_{30} > 0, \quad (3.18)$$

$$I_{54}\tilde{C}_2^4 + I_{53}\tilde{C}_2^3 + \dots + I_{51}\tilde{C}_2 + I_{50} > 0, \quad (3.19)$$

$$I_{76}\tilde{C}_2^6 + I_{75}\tilde{C}_2^5 + \dots + I_{71}\tilde{C}_2 + I_{70} > 0. \quad (3.20)$$

Тут

$$I_{32} = 3A_1'^2(A_1'A_2' - s_1^2\tilde{a}_2^2) = 3A_1'^2(A_1 + c_1^2m_1)(A_2 + c_2^2m_2) + A_2s_1^2m_2 > 0,$$

$$I_{54} = (A_1'A_2' - \mu^2)[9A_1'(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1g) + 2\tilde{C}_1^2], \quad (3.21)$$

$$I_{76} = (A_1'A_2' - \mu^2)A_1'^2(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1g)^2[4A_1'(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1g) + \tilde{C}_1^2]. \quad (3.22)$$

Щоб I_{54} і I_{76} були додаті, достатньо покласти

$$k_1 + k_2 > \tilde{a}_1g. \quad (3.23)$$

Так як $I_{32} > 0$, то при виконанні нерівності (3.23) і досить великій кутовій швидкості ω_{02} буде можлива стабілізація.

Таким чином, у випадку наявності дисипації стабілізація буде можлива, коли до нерівності (3.23) додається нерівність $k_2 > \tilde{a}_2g$, тобто умова на коефіцієнт пружності k_2 . У цьому є принципова різниця в цих двох випадках.

В даному підрозділі показана можливість стабілізації нестійкого рівномірного обертання в середовищі з опором нестійкого гіроскопа Лагранжа за допомогою другого гіроскопа у випадку відсутності постійних моментів в інерціальній системі відліку. Стабілізація буде неможлива при збігу центру мас другого гіроскопа з їх загаль-

ною точкою з першим гіроскопом. Виписано достатні умови на коефіцієнти пружності шарнірів при яких буде можлива стабілізація. Проведено порівняння отриманих умов стабілізації з аналогічними умовами при відсутності дисипації.

3.3 Стійкість обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа на підвісі

Задача про обертання твердого тіла на підвісі є подальшим узагальненням дуже важливої та класичної задачі про обертання твердого тіла навколо нерухомої точки. Струнний підвіс був застосований для експериментального визначення напрямку головних осей інерції складних механічних конструкцій, для балансування турбін та важких центрифуг та у багатьох інших близьких задач. В даний час є досить велика кількість публікацій про різні аспекти обертання твердого тіла і твердого тіла з рідиною на підвісі [58, 64, 80 – 84, 91, 123, 135, 141, 149, 150, 154, 169, 171, 176]. Але вплив опору середовища, інерційних та масових характеристик підвісу на умови стійкості обертання, ще мало досліджено.

На підставі розробленої в розділі 2 підходу дослідження рівномірних обертань систем зв'язаних гіроскопів Лагранжа, розглянемо задачу про стійкість обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа на підвісі.

У даному підрозділі на відміну від розділів 2,3 будуть застосовані кути Крилова. З урахуванням дисипативного моменту, постійного моменту в неінерційній системі відліку та постійного моменту в інерційній системі відліку отримані умови асимптотичної стійкості рівномірних обертань у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа на підвісі. На підставі критерія Льєнара–Шіпара, записаного в інваріантному вигляді, отримані умови асимптотичної стійкості у вигляді системи трьох нерівностей відносно кутової швидкості ω ($x = \omega^2$) та відносно коефіцієнтів пружності шарнірів k_i ($i = 1, 2$). Відносно кутової швидкості ці нерівності мають 8, 6 і 2 степінь, а відносно коефіцієнтів пружності шарнірів – 5, 3 і 1 степінь. Розглянуто різні випадки відсутності одного або другого постійного моменту, відродження підвісу у струну. У випадку відсутності постійного моменту в інерціальній системі відліку показано, що при зростанні пружності в сферичному шарнірі та в шарнірі Гука завжди буде можлива асимптотична стійкість при будь-якій кутовій швидкості і при любых параметрах механічної

системи. Отримані результати узагальнюють відомі результати про стійкість рівномірних обертань гіроскопа Лагранжа на підвісі у випадку: дії дисипативних моментів та двох постійних моментів, дії відновлюючих пружних шарнірів, масових та інерційних характеристик підвісу. Зроблено порівняння отриманих умов стійкості з умовами стійкості за відсутності дисипації.

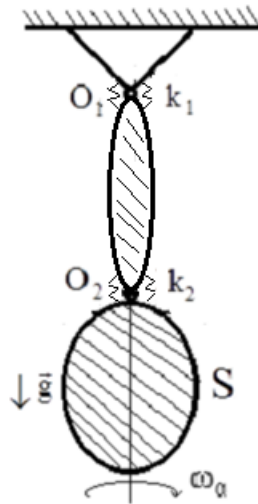


Рис. 3.3 Гіроскоп Лагранжа на підвісі

3.3.1 Постановка задачі. Основні рівняння

Нехай тверде тіло S_1 (підвіс), як і раніше, має нерухому точку O_1 в якій на нього діє пружний відновлювальний сферичний шарнір $L_1 = k_1 \mathbf{v} \times \mathbf{s} / |\mathbf{s}|, k_1 \geq 0$. Динамічно-симетричні тверді тіла S_1 і S_2 пов'язані в точці O_2 також пружним відновлювальним сферичним шарніром $L_2 = k_2 \mathbf{s} \times \mathbf{c}_2 / (|\mathbf{s}| |\mathbf{c}_2|), k_2 \geq 0$. Тверде тіло S_i ($i=1,2$) знаходиться під дією сили тяжіння і дисипативного моменту $\mathbf{M}_i = \mathbf{D}_i \boldsymbol{\omega}_i$, $\mathbf{D}_i = \text{diag}(D_{i1}, D_{i1}, D_{i3}), D_{ij} > 0, i=1,2; j=1,3$, що моделює середовище з опором. Нехай тверде тіло S_2 знаходиться також під дією постійного моменту в неінерційній системі відліку $\mathbf{M}_q = Q \mathbf{e}_3^2$, який спрямований вздовж осі симетрії цього тіла, та під дією постійного моменту в інерційній системі відліку $\mathbf{M}_p = P \mathbf{g} / |\mathbf{g}|$. Ці моменти підтримують обертання тіла S_2 . Тут $\boldsymbol{\omega}_i$ – кутова швидкість твердого тіла S_i , $\mathbf{s} = \overrightarrow{O_1 O_2}, \mathbf{c}_i = \overrightarrow{O_i C_i}, C_i$ – центр мас тіла S_i , $\mathbf{g}$ – вектор прискорення вільного падіння (Рис. 3.3).

Рівняння обертання в середовищі з опором двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа матимуть вигляд [58, 84, 79, 24]:

$$\begin{aligned}
& (J_1 \cdot \omega_1)' + m_2 s \times (\omega_1 \times s + \omega_2 \times c_2)' = \\
& = (m_1 c_1 + m_2 s) \times g + L_1 - L_2 + M_q - D_1 \omega_1, \\
& (J_2 \cdot \omega_2)' + m_2 c_2 \times (\omega_1 \times s + \omega_2 \times c_2)' = \\
& = m_2 c_2 \times g + L_2 + M_p + M_q - D_2 \omega_2.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Тут $J_i = \text{diag}(A_i, A_i, C_i)$ – тензор інерції твердого тіла S_i відносно точки O_i , m_i – маса.

Зв'яжемо з кожним із тіл S_i незмінно базис $\mathbf{e}_1^i \mathbf{e}_2^i \mathbf{e}_3^i$ з вершиною в точці O_i , осі якого направимо по головних осях тензора інерції J_i і введемо нерухомий базис $\mathbf{e}_1^0 \mathbf{e}_2^0 \mathbf{e}_3^0$, вектор $\mathbf{e}_3^0$ якого збігається з векторами $\mathbf{v}$. Нехай $\mathbf{s} = s \mathbf{e}_3^1$, $\mathbf{c}_i = c_i \mathbf{e}_3^i$ ($c_i \geq 0$).

Векторні рівняння (3.24) в кутах Кривої $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ відносно інерціальної системи $\mathbf{e}_1^0 \mathbf{e}_2^0 \mathbf{e}_3^0$ запишуться наступним чином [58, 156, 24]:

$$\begin{aligned}
& A_i'(\ddot{\beta}_i + \dot{\alpha}_i^2 \sin \beta_i \cos \beta_i) + C_i r_i \dot{\alpha}_i \cos \beta_i + \mu \beta_{ki} = \\
& = -\tilde{a}_i g \sin \beta_i \cos \alpha_i + k_i(\alpha_{32}^{i-1,i} \cos \gamma_i + \alpha_{31}^{i-1,i} \sin \gamma_i) + \\
& + k_{i+1}(\alpha_{32}^{i+1,i} \cos \gamma_i + \alpha_{31}^{i+1,i} \sin \gamma_i) - D_{i1} \dot{\beta}_i - \alpha_{31}^{02} \delta_{i2} P
\end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}
& A_i'(\ddot{\alpha}_i \cos \beta_i - 2\dot{\alpha}_i \dot{\beta}_i \sin \beta_i) - C_i r_i \dot{\beta}_i + \mu \alpha_{ki} = \\
& = -\tilde{a}_i g \sin \alpha_i + k_i(\alpha_{32}^{i-1,i} \sin \gamma_i + \alpha_{31}^{i-1,i} \cos \gamma_i) + \\
& + k_{i+1}(\alpha_{32}^{i+1,i} \sin \gamma_i + \alpha_{31}^{i+1,i} \cos \gamma_i) - D_{i1} \dot{\alpha}_i \cos \beta_i - \alpha_{31}^{02} \delta_{i2} P
\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$C_i \dot{r}_i = -D_{i3} r_i + Q_i - \alpha_{33}^{i0} \delta_{i3} P. \quad (i=1, 2). \tag{3.27}$$

де $A_1' = A_1 + s^2 m_2$, $A_2' = A_2$, $\mu = s \tilde{a}_2$, $\tilde{a}_1 = m_1 c_1 + m_2 s$, $\tilde{a}_2 = m_2 c_2$;

$r_i = \dot{\gamma}_i - \dot{\alpha}_i \sin \beta_i$, p_i, q_i, r_i – проекції вектора кутової швидкості ω_i твердого тіла S_i на

осі $\mathbf{e}_1^i \mathbf{e}_2^i \mathbf{e}_3^i$, δ_{ij} – символ Кронекера, $\alpha_{\mu\kappa}^{ij} = \mathbf{e}_\mu^i \cdot \mathbf{e}_\kappa^j$, $\mathbf{e}_\mu^i = \sum_{\kappa=1}^3 \alpha_{\mu\kappa}^{i0} \mathbf{e}_\kappa^0$, $\alpha_{\mu\kappa}^{ij} = \sum_{\sigma=1}^3 \alpha_{\mu\sigma}^{i0} \alpha_{\kappa\sigma}^{j0}$,

$$\begin{aligned}
& \alpha_{11}^{i0} = \cos \alpha_i \cos \gamma_i + \sin \alpha_i \sin \beta_i \sin \gamma_i, \alpha_{21}^{i0} = \cos \beta_i \sin \gamma_i, \\
& \alpha_{31}^{i0} = -\sin \alpha_i \cos \gamma_i + \cos \alpha_i \sin \beta_i \sin \gamma_i, \alpha_{12}^{i0} = -\cos \alpha_i \sin \gamma_i + \sin \alpha_i \sin \beta_i \cos \gamma_i, \\
& \alpha_{22}^{i0} = \cos \beta_i \cos \gamma_i, \alpha_{13}^{i0} = \sin \alpha_i \cos \beta_i, \alpha_{32}^{i0} = \sin \alpha_i \sin \gamma_i + \cos \alpha_i \sin \beta_i \cos \gamma_i, \\
& \alpha_{13}^{i0} = \sin \alpha_i \cos \beta_i, \alpha_{23}^{i0} = -\sin \beta_i, \alpha_{33}^{i0} = \cos \alpha_i \cos \beta_i.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Коефіцієнти $\alpha_{32}^{21}, \alpha_{31}^{21}, \alpha_{32}^{12}, \alpha_{31}^{12}, \alpha_{32}^{12}$, що входять в рівняння (3.26), визначаються з виразів (3.28).

Система (3.25) – (3.26) допускає розв'язки $\alpha_i = \beta_i = 0$, $\gamma_i = \omega_{0i}t$, $r_i = \omega_{0i} = (P + Q)/D_{i3}$, які відповідають рівномірним обертанням твердих тіл S_i з кутовими швидкостями ω_{0i} навколо вертикалі.

Нехай в збуреному русі $\omega_i = \omega_{0i} + \Omega_i$, де $|\Omega_i|$ є величина першого порядку малості порівняно з $|\omega_{0i}|$.

Нехай $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega = (P + Q)/D_3$. Це може бути, коли в точці O_2 діє шарнір Гука і $D_{13} = D_{23} = D_3$. Можливість заміни сферичного шарніру на шарнір Гука обговорювалась в роботі [156].

Зберігаючи для змінних їх колишні позначення, запишемо лінеаризовані рівняння збуреного руху:

$$\begin{aligned} A'_i \ddot{\beta}_i + \tilde{C}_i \dot{\alpha}_i + \mu \ddot{\beta}_j &= -D_{i1} \dot{\beta}_i - (\tilde{a}_i g + k_i + k_{i+1}) \beta_i - P \delta_{i2} \alpha_i, \\ A'_i \ddot{\alpha}_i - \tilde{C}_i \dot{\beta}_i + \mu \ddot{\alpha}_j &= -D_{i1} \dot{\alpha}_i - (\tilde{a}_i g + k_i + k_{i+1}) \alpha_i \quad (i=1, 2; \quad j=3-i). \end{aligned} \quad (3.29)$$

де δ_{i2} – символ Кронекера.

Нехай $u_i = \beta_i - i\alpha_i$, тоді рівняння (3.29) приймуть вигляд:

$$A'_i \ddot{u}_i + (i\tilde{C}_i + D_{i1}) \dot{u}_i + \mu \ddot{u}_j = (\tilde{a}_i g - k_i - k_{i+1} - iP_i) u_i \quad (i=1, 2; \quad j=3-i), \quad (3.30)$$

де $\tilde{C}_i = C_i \omega_{0i}$, $D_i = D_{i1}$.

Представивши шукані функції у вигляді $a e^{\lambda t}$, запишемо характеристичне рівняння збуреного руху (3.30) у вигляді:

$$\begin{vmatrix} F_1 & \mu \lambda^2 \\ \mu \lambda^2 & F_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.31)$$

Тут $F_1 = A'_1 \lambda^2 + (i\tilde{C}_1 + D_1) \lambda + \tilde{a}_1 g + k_1 + k_2$,

$$F_2 = A'_2 \lambda^2 + (i\tilde{C}_2 + D_2) \lambda + \tilde{a}_2 g + k_2 + iP.$$

Далі перепишемо (3.32) у вигляді:

$$a_4 \lambda^4 + (a_3 + ib_3) \lambda^3 + \dots + a_0 + ib_0 = 0 \quad (3.32)$$

Тут

$$a_4 = A'_1 A'_2 - \mu^2, \quad a_3 = A'_1 D_2 + A'_2 D_1, \quad b_3 = A'_1 C_2 + A'_2 \tilde{C}_1,$$

$$\begin{aligned}
a_2 &= (k_1 + k_2 + \tilde{a}_1 g) A'_2 + (k_2 + \tilde{a}_2 g) A'_1 - \tilde{C}_1 C_2 + D_1 D_2, \\
b_2 &= P A'_1 + \tilde{C}_1 D_2 + C_2 D_1, \\
a_1 &= (k_1 + k_2 + \tilde{a}_1 g) D_2 + (k_2 + \tilde{a}_2 g) D_1 - C_2 P, \\
b_1 &= (k_1 + k_2 + \tilde{a}_1 g) C_2 + (k_2 + \tilde{a}_2 g) \tilde{C}_1 + D_1 P, \\
a_0 &= (k_2 + \tilde{a}_2 g)(k_1 + k_2 + \tilde{a}_1 g), \quad b_0 = (k_1 + k_2 + \tilde{a}_1 g) P.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

$\tilde{A}_2$ – момент інерції тіла S_2 відносно його центру мас.

Як і раніше, для того, щоб всі нулі рівняння (3.32) лежали у відкритій лівій півплощині, необхідно і достатньо, щоб матриця сьомого порядку, складена з коефіцієнтів цього рівняння, була іннерно-позитивною, тобто виконувалися нерівності (3.3) – (3.6).

Так як $I_1 = a_3 = A'_1 D_2 + A'_2 D_1 > 0$, то асимптотична стійкість рівномірних обертань в середовищі з опором гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною на підвісі визначається трьома нерівностями (3.4) – (3.6).

Умови асимптотичної стійкості можуть бути представлені у вигляді системи трьох нерівностей відносно кутової швидкості ω ($P = \omega D_3 - Q$) або коефіцієнтів пружності шарнірів k_i ($i = 1, 2$):

$$\begin{aligned}
I_{32} \omega^2 + I_{31} \omega + I_{30} &> 0, \quad I_{56} \omega^6 + I_{55} \omega^5 + \dots + I_{51} \omega + I_{50} > 0, \\
I_{78} \omega^8 + I_{77} \omega^7 + \dots + I_{71} \omega + I_{70} &> 0,
\end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\tilde{I}_{31} k_1 + \tilde{I}_{30} > 0, \quad \tilde{I}_{53} k_1^3 + \tilde{I}_{52} k_1^2 + \tilde{I}_{51} k_1 + \tilde{I}_{50} > 0, \quad \tilde{I}_{75} k_1^5 + \tilde{I}_{74} k_1^4 + \dots + \tilde{I}_{71} k_1 + \tilde{I}_{70} > 0. \tag{3.35}$$

$$\hat{I}_{31} k_2 + \hat{I}_{30} > 0, \quad \hat{I}_{53} k_2^3 + \hat{I}_{52} k_2^2 + \hat{I}_{51} k_2 + \hat{I}_{50} > 0, \quad \hat{I}_{76} k_2^6 + \hat{I}_{75} k_2^5 + \dots + \hat{I}_{71} k_2 + \hat{I}_{70} > 0. \tag{3.36}$$

Зважаючи на громіздкість отриманих коефіцієнтів, розглянемо низку окремих випадків, які мають і самостійний інтерес.

1. *Випадок відсутності постійного моменту у інерційній системі відліку* ($P = 0$). У цьому разі $\omega = Q/D_3$, у коефіцієнтах (3.33) треба покласти $P = 0$. Вид умов стійкості (3.35) – (3.36) не змінюється, а умови (3.34) запишуться наступним чином:

$$\begin{aligned}
I_{31} x + I_{30} &> 0, \quad I_{52} x^2 + I_{51} x + I_{50} > 0, \\
I_{72} x^2 + I_{71} x + I_{70} &> 0, \quad (x = \omega^2).
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Проведемо дослідження умов стійкості (3.35). В цьому разі для коефіцієнта пружності k_1 коефіцієнти $\tilde{I}_{31}$, $\tilde{I}_{53}$ і $\tilde{I}_{75}$ отримують вигляд:

$$\begin{aligned}\tilde{I}_{31} &= f_3(A'_2 D_1 + A'_1 D_2) > 0, \tilde{I}_{53} = D_2 f_3 > 0, \tilde{I}_{75} = D_2^2 f_3^2 h_7, \\ f_3 &= A_2'^2 D_1 + \mu^2 D_2 > 0, h_7 = k_2 + \tilde{a}_2 g.\end{aligned}\quad (3.38)$$

Знайдемо умови на коефіцієнт пружності k_2 при яких старші коефіцієнти нерівностей (3.35) будуть додатні.

Із (3.38) випливає, що коефіцієнт $\tilde{I}_{75}$ буде додатним, коли $h_7 > 0$, тобто при

$$k_2 > -\tilde{a}_2 g. \quad (3.39)$$

Таким чином, коли точка підвісу O_2 знаходиться не нижче центру мас тіла S_2 ($c_2 \geq 0$) або нижче ($c_2 < 0$) і $k_2 > -\tilde{a}_2 g$, то для довільних значень механічних параметрів системи при досить великих значеннях коефіцієнту k_1 буде можлива асимптотична стійкість.

Відносно коефіцієнта пружності k_2 (шарнір Гука) із (3.36) слідує, що коефіцієнти $\hat{I}_{31}$, $\hat{I}_{53}$ і $\hat{I}_{76}$ отримують більш складний вигляд:

$$\begin{aligned}\hat{I}_{31} &= (A'_2 D_1 + A'_1 D_2) \left[(A_2'^2 + \mu^2) D_1 + (A_1'^2 + \mu^2) D_2 \right] > 0, \\ \hat{I}_{53} &= \left[(A_2'^2 + \mu^2) D_1 + (A_1'^2 + \mu^2) D_2 \right] \left[(A_1' - A_2^*)^2 D_1 D_2 + \mu^2 (D_1 + D_2)^2 \right] > 0, \\ \hat{I}_{76} &= \left[(A_1' - A_2^*)^2 D_1 D_2 + \mu^2 (D_1 + D_2)^2 \right]^2 > 0.\end{aligned}\quad (3.40)$$

Таким чином, для довільних значень механічних параметрів системи при збільшенні коефіцієнта пружності k_2 буде можлива асимптотична стійкість.

2. Випадок відсутності постійного моменту у неінерційній системі відліку ($Q = 0$). У цьому разі $\omega = P/D_3$, від умов стійкості (3.35) не змінюється, а умови (3.34) отримують вигляд:

$$\begin{aligned}I_{31}x + I_{30} &> 0, I_{53}x^3 + I_{52}x^2 + I_{51}x + I_{50} > 0, \\ I_{74}x^4 + I_{73}x^3 + \dots + I_{71}x + I_{70} &> 0 \quad (x = \omega^2).\end{aligned}\quad (3.41)$$

Для перевірки отриманих результатів, зокрема умов стійкості (3.41), розглянемо випадок виродження підвісу в безмасову і безінерційну струну ($A_1 = C_1 = 0$, $m_1 = 0$), відсутність дисипації у струні ($D_1 = 0$) і пружності у шарнірів ($k_1 = k_2 = 0$). В цьому разі умови стійкості (3.41) запишуться так:

$$I_3 = m_2^3 s^5 f_3 > 0, I_5 = m_2^6 s^7 c_2^4 g^4 f_3 > 0, I_7 = m_2^9 s^9 c_2^4 g^4 f_7 > 0. \quad (3.42)$$

Тут

$$f_3 = (D_2 C_2 - D_3 \tilde{A}_2) s D_3 \omega^2 + c_2 (s + c_2) D_2^2 m_2 g.$$

$$f_7 = - (D_2 C_2 - D_3 \tilde{A}_2) s D_3^3 \omega^4 + \\ + \left[(D_2 C_2 - D_3 \tilde{A}_2) - c_2 (s + c_2) m_2 D_3 \right] D_2^2 D_3 g + D_2^4 m_2 c_2 g^2$$

Нерівності (3.42) у безрозмірних змінних статті [91] будуть мати вигляд:

$$I \xi < m a (a + b), \quad (3.43)$$

$$I \xi^2 - [I + m a (a + b)] \xi + m a b > 0. \quad (3.44)$$

де $\xi = b (\omega D_3)^2 / D_1^2 g$, $m = m_2$; $b = s$, $a = c_2$, $I = \tilde{A}_2 - C_2 D_2 / D_3$.

Умова стійкості (3.44) збігається з аналогічною умовою статті [91], але у роботі [91] відсутня умова (3.43) і тому висновок у статті, що при $I > 0$ і достатньо великих значень кутової швидкості обертання буде стійким невірним.

3.3.2. Випадок відсутності дисипативних ($D_{ij} = 0, i = 1, 2; j = 1, 3$) і постійних моментів ($P = Q = 0$).

Розглянемо випадок відсутності дисипативних ($D_{ij} = 0, i = 1, 2; j = 1, 3$) і постійних моментів ($P = Q = 0$). У цьому випадку характеристичне рівняння (3.32) при $a_1 = a_3 = b_2 = b_0 = 0$ матиме вигляд:

$$a_4 \lambda^4 + i b_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + i b_1 \lambda + a_0 = 0. \quad (3.45)$$

Коефіцієнти рівняння (3.45) визначаються за формулами (3.34), в яких потрібно покласти $D_{ij} = 0$ і $P = Q = 0$.

Стійкість консервативних систем визначається тим, що корені рівняння (3.45) повинні знаходитися на уявній осі. Для цього в рівнянні (3.45) покладемо $\lambda = i\sigma$ і це рівняння матиме вигляд:

$$a_4\sigma^4 + b_3\sigma^3 - a_2\sigma^2 - b_1\sigma + a_0 = 0. \quad (3.46)$$

Як і раніше, для того, щоб всі нулі рівняння (3.46) були різні і лежали на дійсній осі, необхідно і достатньо, щоб матриця сьомого порядку, яка складена з коефіцієнтів цього рівняння, була іннорно-позитивною, тобто виконувалися нерівності (3.15) – (3.17).

Так як $I_1 > 0$, то стійкість рівномірних обертань двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа визначається трьома нерівностями (3.15) – (3.17).

Умови асимптотичної стійкості представимо у вигляді системи трьох нерівностей відносно кутової швидкості ω і коефіцієнтів пружності шарнірів k_i ($i=1,2$):

$$I_{32}\omega^2 + I_{31}\omega + I_{30} > 0, I_{56}\omega^6 + I_{55}\omega^5 + \dots + I_{51}\omega + I_{50} > 0, \\ I_{78}\omega^8 + I_{77}\omega^7 + \dots + I_{71}\omega + I_{70} > 0. \quad (3.47)$$

$$\tilde{I}_{31}k_1 + \tilde{I}_{30} > 0, \tilde{I}_{53}k_1^3 + \tilde{I}_{52}k_1^2 + \tilde{I}_{51}k_1 + \tilde{I}_{50} > 0, \\ \tilde{I}_{75}k_1^5 + \tilde{I}_{74}k_1^4 + \dots + \tilde{I}_{71}k_1 + \tilde{I}_{70} > 0, \quad (3.48)$$

$$\hat{I}_{31}k_2 + \hat{I}_{30} > 0, \hat{I}_{53}k_2^3 + \hat{I}_{52}k_2^2 + \hat{I}_{51}k_2 + \hat{I}_{50} > 0, \hat{I}_{76}k_2^6 + \hat{I}_{75}k_2^5 + \dots + \hat{I}_{71}k_2 + \tilde{I}_{70} > 0. \quad (3.49)$$

Проведемо дослідження умов стійкості (3.48). Для коефіцієнта пружності k_1 коефіцієнти $\tilde{I}_{31}$, $\tilde{I}_{53}$ і $\tilde{I}_{75}$ отримують вигляд:

$$\tilde{I}_{31} = 8a_5^2 A'_2 > 0, \tilde{I}_{53} = \tilde{I}_{31} (A'_2)^2 > 0, \tilde{I}_{75} = \frac{1}{2} \tilde{I}_{31} (A'_2)^2 h_7, \\ h_7 = (k_2 + \tilde{a}_2 g) + C_2^2 \omega^2. \quad (3.50)$$

Із (3.50) слідує, що вираз h_7 буде додатним при $k_2 > -\tilde{a}_2 g$ і в цьому разі буде додатним $\tilde{I}_{75}$. Таким чином, при досить великих значень коефіцієнтів пружності k_1 і $k_2 > -\tilde{a}_2 g$ будуть виконані нерівності (3.48).

Для коефіцієнта пружності k_2 (шарнір Гука) коефіцієнти $\hat{I}_{31}$, $\hat{I}_{53}$ і $\hat{I}_{76}$ мають вигляд:

$$\hat{I}_{31} = 8a_4^2 (A'_1 + A'_2) > 0, \hat{I}_{53} = \hat{I}_{31} (A'_2)^3 > 0, \hat{I}_{76} = 16a_4^2 h_5^2 > 0, \\ h_5 = (A'_1 + A'_2)^2 + 4\mu^2 > 0. \quad (3.51)$$

Із (3.51) слідує, що при досить великих значень коефіцієнтів пружності k_2 будуть виконані нерівності (3.49).

Таким чином, збільшенням значення коефіцієнтів пружності шарнірів завжди можна досягти виконання нерівностей (3.47) – (3.49) при $C_i > 0$ і $A_i > 0$ незалежно від значень інших механічних параметрів системи.

3.4 Висновки до розділу 3

У даному розділі на підставі характеристичного рівняння, виведеного у другому розділі і на основі критерія Ляпунова-Шіпара, записаного у інваріантному вигляді, отримані та аналітично досліджені умови асимптотичної стійкості рівномірних обертань у середовищі з опором системи двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа. Ці умови представлені у вигляді системи трьох нерівностей. Проведено їх аналітичні (якісні) дослідження на низці частинних задач.

Розглянуто можливість стабілізації нестійкого рівномірного обертання в середовищі з опором гіроскопа Лагранжа за допомогою другого гіроскопа, якій обертається, та знаходиться над ним. Стабілізація буде неможлива при збігу центру мас другого гіроскопа з їх загальною точкою з першим гіроскопом. Виписано достатні умови на коефіцієнти пружності шарнірів, при яких старші коефіцієнти нерівностей додатні. Показно, що стабілізація завжди буде можлива при досить великій кутовій швидкості обертання другого гіроскопа та за рахунок збільшення значень коефіцієнтів пружності шарнірів. Проведено порівняння отриманих умов стабілізації з аналогічними умовами при відсутності дисипації.

Розглянуто задачу про стійкість рівномірних обертань на підвісі гіроскопа Лагранжа в середовищі з опором. Проведено аналітичні (якісні) дослідження впливу дисипації, постійних моментів, пружності шарнірів, масових та інерційних характеристик підвіски на умови стійкості. У випадку відсутності постійного моменту в інерціальній системі відліку показано, що при зростанні пружності в сферичному шарнірі та в шарнірі Гука завжди буде можлива асимптотична стійкість при будь-якій кутовій швидкості і при будь-яких параметрах механічної системи. Для перевірки отриманих умов асимптотичної стійкості був розглянутий відомий в літературі випадок виродження підвісу в

безмасову і безінерційну струну, відсутність дисипації у струні і пружності у шарнірах. У цьому випадку ми маємо дві умови стійкості. Друга умова стійкості збіглася з відомою умовою, а перша умова у статті була пропущена.

Слід зазначати, що усі отримані умови асимптотичної стійкості і необхідні умови стійкості при відсутності дисипації прості та зручні для проведення чисельних досліджень.

РОЗДІЛ 4

АСИМПТОТИЧНА СТІЙКІСТЬ РІВНОМІРНИХ ОБЕРТАНЬ У СЕРЕДОВИЩІ З ОПОРОМ СИСТЕМИ ДВОХ ПРУЖНО ЗВ'ЯЗАНИХ ГІРОСКОПІВ ЛАГРАНЖА З ІДЕАЛЬНОЮ РІДИНОЮ

У даному розділі узагальнюються основні результати третього розділу на випадок гіроскопів Лагранжа, які містять довільну осесиметричну порожнину з ідеальною нестисливою рідиною. З урахуванням основного тону коливання рідини отримано у вигляді системи п'яти нерівностей умови асимптотичної стійкості рівномірних обертань. Ці умови виписані відносно кінетичних моментів першого або другого гіроскопів, відносно кутових швидкостей гіроскопів, а також відносно коефіцієнтів пружності сферичних шарнірів k_1 та k_2 . Розглянуті умови стійкості прирізних випадках відсутності постійних моментів в інерційній та неінерційній системах відліку, при випадках виродження сферичних шарнірів у шарнір Гука. Розглянуто можливість стабілізації нестійкого обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною за допомогою другого гіроскопа, який обертається і знаходиться над ним. На прикладі стиснутої еліпсоїдальної порожнини показано, що за досить великої кутової швидкості обертання другого гіроскопа та збільшення значень коефіцієнтів пружності стабілізація завжди буде можлива. Отримані умови стабілізації порівнюються з аналогічними умовами за відсутності дисипації. При відсутності відносного руху рідини і пружного відновлювального шарніру в нерухомій точки отримані результати збігаються з результатами у статтях[23, 22]. Розглянуто задачу про стійкість рівномірних обертань на підвісі гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною в середовищі з опором. З урахуванням основного тону коливань ідеальної рідини отримано умови асимптотичної стійкості. Проведено аналітичні дослідження впливу рідини, пружності шарнірів, масових та інерційних характеристик підвісу на умови стійкості.

Отримані умови порівнюються з умовами стійкості за відсутності дисипації.

4.1 Умови стійкості рівномірних обертань у середовищі з опором системи двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа з ідеальною рідиною

У підрозділі 2.1 було зроблено постановку задачі і вивід основних рівнянь обертання гіроскопів Лагранжа (див. Рис. 4.1)

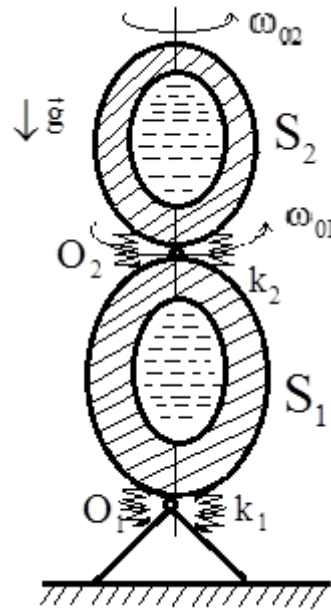


Рис. 4.1 – Система двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа з рідиною

Отримаємо умови стійкості рівномірних обертань у середовищі з опором системи двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа з ідеальною рідиною.

Для цього скористаємося характеристичним рівнянням (2.12).

$$\begin{vmatrix} F_1 & \mu\lambda^2 \\ \mu\lambda^2 & F_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.1)$$

де

$$F_i = A_i' \lambda^2 + (iC_i \omega_{0i} + D_{1i}) \lambda - (a_i g - k_i - k_{i-1} - iP_i) - (i\lambda - \omega_{0i}) \lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_{in}}{i\lambda - \tilde{\lambda}_{in}}, \quad E_{in} = \frac{2a_{in}^2}{N_{in}^2},$$

$$\tilde{\lambda}_{in} = \omega_{0i} (1 - \lambda_{in}), \quad \lambda_{in} = \frac{2}{\kappa_{in}}, \quad k_0 = k_3 = 0.$$

І враховуючи основний тон коливання рідини ($n = 1$) рівняння (4.1) запишеться у вигляді полінома шостого ступеня (2.13) відносно λ .

$$a_6 \lambda^6 + (a_5 + ib_5) \lambda^5 + \dots + (a_1 + ib_1) \lambda + a_0 + ib_0 = 0, \quad (4.2)$$

де коефіцієнти цього рівняння мають вигляд (2.14).

Як і раніше, для того, щоб всі нулі рівняння (4.2) лежали у відкритій лівій півплощині, згідно критерію Ляпунова – Шіпара, записаного в інваріантному вигляді [65, с.31], необхідно і достатньо, щоб матриця одинадцятого порядку, складена з коефіцієнтів

многочлена (4.2) була іннорно-позитивною, тобто були позитивно визначені матриці $\Delta_1, \Delta_3, \Delta_5, \Delta_7, \Delta_9$ і Δ_{11} :

$$I_1 = a_5 > 0, \quad (4.3)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_6 & -b_5 & -a_4 \\ 0 & a_5 & -b_4 \\ a_5 & -b_4 & -a_3 \end{vmatrix} > 0, \quad (4.4)$$

$$I_5 = \begin{vmatrix} a_6 & -b_5 & -a_4 & b_3 & a_2 \\ 0 & a_6 & -b_5 & -a_4 & b_3 \\ 0 & 0 & a_5 & -b_4 & -a_3 \\ 0 & a_5 & -b_4 & -a_3 & b_2 \\ a_5 & -b_4 & -a_3 & b_2 & a_1 \end{vmatrix} > 0, \quad (4.5)$$

$$I_7 = \begin{vmatrix} a_6 & -b_5 & -a_4 & b_3 & a_2 & -b_1 & -a_0 \\ 0 & a_6 & -b_5 & -a_4 & b_3 & a_2 & -b_1 \\ 0 & 0 & a_6 & -b_5 & -a_4 & b_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 & -b_4 & -a_3 & b_2 \\ 0 & 0 & a_5 & -b_4 & -a_3 & b_2 & a_1 \\ 0 & a_5 & -b_4 & -a_3 & b_2 & a_1 & -b_0 \\ a_5 & -b_4 & -a_3 & b_2 & a_1 & -b_0 & 0 \end{vmatrix} > 0, \quad (4.6)$$

$$I_9 = \begin{vmatrix} a_6 & -b_5 & -a_4 & b_3 & a_2 & -b_1 & -a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_6 & -b_5 & -a_4 & b_3 & a_2 & -b_1 & -a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_6 & -b_5 & -a_4 & b_3 & a_2 & -b_1 & -a_0 \\ 0 & 0 & 0 & a_6 & -b_5 & -a_4 & b_3 & a_2 & -b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 & -b_4 & -a_3 & b_2 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 & -b_4 & -a_3 & b_2 & a_1 & -b_0 \\ 0 & 0 & a_5 & -b_4 & -a_3 & b_2 & a_1 & -b_0 & 0 \\ 0 & a_5 & -b_4 & -a_3 & b_2 & a_1 & -b_0 & 0 & 0 \\ a_5 & -b_4 & -a_3 & b_2 & a_1 & -b_0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} > 0, \quad (4.7)$$

$$I_{11} = \begin{vmatrix} a_6 & -b_5 & -a_4 & b_3 & a_2 & -b_1 & -a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_6 & -b_5 & -a_4 & b_3 & a_2 & -b_1 & -a_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_6 & -b_5 & -a_4 & b_3 & a_2 & -b_1 & -a_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_6 & -b_5 & -a_4 & b_3 & a_2 & -b_1 & -a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_6 & -b_5 & -a_4 & b_3 & a_2 & -b_1 & -a_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 & -b_4 & -a_3 & b_2 & a_1 & -b_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 & -b_4 & -a_3 & b_2 & a_1 & -b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 & -b_4 & -a_3 & b_2 & a_1 & -b_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_5 & -b_4 & -a_3 & b_2 & a_1 & -b_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_5 & -b_4 & -a_3 & b_2 & a_1 & -b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & -b_4 & -a_3 & b_2 & a_1 & -b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} > 0. \quad (4.8)$$

Так як $I_1 > 0$, то стійкість рівномірних обертань двох гіроскопів Лагранжа, з ідеальною рідиною, визначається п'ятьма нерівностями (4.4) – (4.8).

4.1.1 Умови стійкості відносно кінетичних моментів першого або другого гіроскопів ($\tilde{C}_i = C_i \omega_{0i}$), моментів інерції C_i і A_i' і кутових швидкостей ω_{0i}

Умови стійкості відносно кінетичного моменту першого гіроскопа $\tilde{C}_1 = C_1 \omega_{01}$ записуються таким чином:

$$\begin{aligned} I_{32} \tilde{C}_1^2 + I_{31} \tilde{C}_1 + I_{30} &> 0, \\ I_{54} \tilde{C}_1^4 + I_{53} \tilde{C}_1^3 + \dots + I_{51} \tilde{C}_1 + I_{50} &> 0, \\ I_{76} \tilde{C}_1^6 + I_{75} \tilde{C}_1^5 + \dots + I_{71} \tilde{C}_1 + I_{70} &> 0, \\ I_{98} \tilde{C}_1^8 + I_{97} \tilde{C}_1^7 + \dots + I_{91} \tilde{C}_1 + I_{90} &> 0, \\ I_{119} \tilde{C}_1^9 + I_{118} \tilde{C}_1^8 + \dots + I_{111} \tilde{C}_1 + I_{110} &> 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Тут $I_{32} = (A_2^{*2} D_1 + \mu^2 D_2) D_2$. Наступні коефіцієнти не виписані через їхню громіздкість.

Умови стійкості відносно кінетичного моменту другого гіроскопа $\tilde{C}_2 = C_2 \omega_{02}$ мають вигляд нерівностей (4.9) в яких треба замінити $\tilde{C}_1$ на $\tilde{C}_2$. В цьому випадку:

$$I_{32} = (A_1^{*2} D_2 + \mu^2 D_1) D_1.$$

При відсутності постійних моментів в інерціальній системі відліку ($P_1 = P_2 = 0$) умови стійкості відносно кінетичного моменту першого гіроскопа $\tilde{C}_1$ мають вигляд (4.9), де тільки остання нерівність має не дев'яту, а восьму степінь. В цьому випадку:

$$I_{32} = (A_2^{*2} D_1 + \mu^2 D_2) D_2,$$

$$I_{54} = I_{32} D_2^2 \left[k_2 - \tilde{a}_2 g + (\tilde{\lambda}_2 - \omega_{02}) \tilde{\lambda}_2 E_2 \right].$$

Наступні коефіцієнти не виписані через їхню громіздкість. Це буде і далі.

Умови стійкості відносно $\tilde{C}_2$ мають такий вигляд, як і для $\tilde{C}_1$, де треба замість $\tilde{C}_1$ записати $\tilde{C}_2$.

Із першої нерівності в (4.9) можна отримати умови нестійкості у вигляді $x_1 < \tilde{C}_1 < x_2$, де x_k корені рівняння $I_{32} \tilde{C}_1^2 + I_{31} \tilde{C}_1 + I_{30} = 0$, які розташовані у порядку зростання. Аналогічні умови можна записати і відносно $\tilde{C}_2$.

Умови стійкості відносно головних моментів інерції C_i принципово не відрізняються від раніше розглянутих умов стійкості відносно кінетичних моментів $\tilde{C}_i$. Аналогічні умови мають місце і відносно A'_i .

Розглянемо умови стійкості відносно кутових швидкостей ω_{0i} , де $\tilde{C}_i = C_i \omega_{0i}$, $\tilde{\lambda}_{in} = \omega_{0i} (1 - \lambda_{in})$. Ці умови мають вигляд:

$$I_{32} \omega_i^2 + I_{31} \omega_i + I_{30} > 0,$$

$$I_{56} \omega_i^6 + I_{55} \omega_i^5 + \dots + I_{51} \omega_i + I_{50} > 0,$$

$$I_{710} \omega_i^{10} + I_{79} \omega_i^9 + \dots + I_{71} \omega_i + I_{70} > 0, \quad (4.10)$$

$$I_{914} \omega_i^{14} + I_{913} \omega_i^{13} + \dots + I_{91} \omega_i + I_{90} > 0,$$

$$I_{1110} \omega_i^{10} + I_{119} \omega_i^9 + \dots + I_{111} \omega_i + I_{110} > 0, \omega_i = \omega_{0i}.$$

При відсутності постійних моментів в інерціальній системі відліку ($P_1 = P_2 = 0$) умови стійкості відносно кутових швидкостей ω_{0i} мають вигляд:

$$I_{32} \omega_i^2 + I_{31} \omega_i + I_{30} > 0,$$

$$I_{52} \omega_i^2 + I_{51} \omega_i + I_{50} > 0,$$

$$\begin{aligned}
I_{76}\omega_i^6 + I_{75}\omega_i^5 + \dots + I_{71}\omega_i + I_{70} &> 0, \\
I_{97}\omega_i^7 + I_{97}\omega_i^7 + \dots + I_{91}\omega_i + I_{90} &> 0, \\
I_{117}\omega_i^7 + I_{116}\omega_i^6 + \dots + I_{111}\omega_i + I_{110} &> 0.
\end{aligned}$$

Отримані умови стійкості (4.10) дозволяють у першому наближенні записати умови стійкості обертання у середовищі з опором симетричного пружного тіла з порожнинами, що містять ідеальну рідину. Для цього потрібно замінити пружний сферичний шарнір у точці O_2 пружним універсальним шарніром (шарніром Гука). Умови стійкості (4.10) у випадку $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega$ отримують вигляд:

$$\begin{aligned}
I_{34}\omega^4 + I_{33}\omega^3 + I_{32}\omega^2 + I_{31}\omega + I_{30} &> 0, \\
I_{59}\omega^9 + I_{58}\omega^8 + \dots + I_{51}\omega + I_{50} &> 0, \\
I_{716}\omega^{16} + I_{715}\omega^{15} + \dots + I_{71}\omega + I_{70} &> 0, \\
I_{922}\omega^{22} + I_{921}\omega^{21} + \dots + I_{91}\omega + I_{90} &> 0, \\
I_{1126}\omega^{26} + I_{1125}\omega^{25} + \dots + I_{111}\omega + I_{110} &> 0, \\
I_{34} = -C_i^2 (A_2^*)^2 (\lambda_i - 1)^2 (A_1^* A_2^* - \mu^2) &< 0, \\
I_{58} = I_{34} C_i^2 (\lambda_i - 1)^2 A_2^* D_{3-i} &< 0, \quad i = 1, 2.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

де $I_{34} = -C_i^2 (A_2^*)^2 (\lambda_i - 1)^2 (A_1^* A_2^* - \mu^2) < 0$, $I_{58} = I_{34} C_i^2 (\lambda_i - 1)^2 A_2^* D_{3-i} < 0$, $i = 1, 2$.

4.1.2 Умови стійкості відносно коефіцієнтів пружності сферичних шарнірів k_1 і k_2 при $P_1 = P_2 = 0$

Умови стійкості відносно коефіцієнта пружності k_2 і $P_1 = P_2 = 0$ запишуться наступним чином:

$$\begin{aligned}
I_{32}k_2^2 + I_{31}k_2 + I_{30} &> 0, \\
I_{54}k_2^4 + I_{53}k_2^3 + \dots + I_{51}k_2 + I_{50} &> 0, \\
I_{76}k_2^6 + I_{75}k_2^5 + \dots + I_{71}k_2 + I_{70} &> 0, \\
I_{98}k_2^8 + I_{97}k_2^7 + \dots + I_{91}k_2 + I_{90} &> 0, \\
I_{110}k_2^{10} + I_{119}k_2^9 + \dots + I_{111}k_2 + I_{110} &> 0.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Тут $I_{32} = -(A_1^* + A_2^* + 2\mu)^2 (A_1^* A_2^* - \mu^2) < 0$, $I_{54} = I_{32} (D_1 + D_2) (A_1^* + A_2^* + 2\mu) < 0$.

Умови стійкості відносно коефіцієнта пружності k_1 мають вигляд нерівностей (4.12) в яких треба замінити k_1 на k_2 ізменшити степінь останньої нерівності на одиницю, де тепер буде $I_{32} = -(A_2^*)^2 (A_1^* A_2^* - \mu^2) < 0$, $I_{54} = I_{32} A_2^* D_2 < 0$.

З точністю до першого степеня малості коефіцієнта пружності k_2 умови стійкості (4.12) отримують вигляд $I_{2k+1,1} k_2 + I_{2k+1,0} > 0$, а при відсутності пружності ($k_2 = 0$) – $I_{2k+1,0} > 0$, де $k = \overline{1,5}$.

4.2 Стабілізація нестійкого обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною за допомогою другого гіроскопа, який знаходиться над ним при $P_1 = P_2 = 0$

Узагальним результати підрозділу 3.2 на випадок гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною (див. Рис. 2.3 або 4.2).

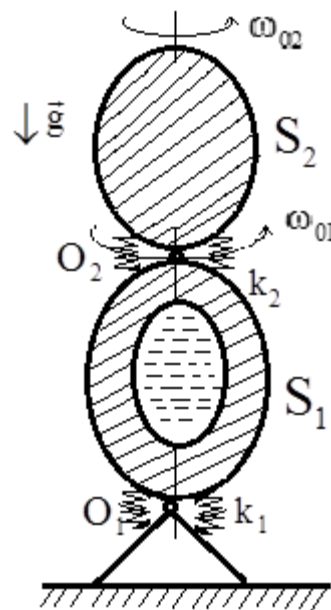


Рис. 4.2. Система двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа з рідиною у нижньому гіроскопі

У цьому випадку характеристичне рівняння буде мати вигляд (2.12)

$$\begin{vmatrix} F_1 & \mu\lambda^2 \\ \mu\lambda^2 & F_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.13)$$

$$\text{Де } F_1 = A'_1 \lambda^2 + (i\tilde{C}_1 + D_1) \lambda - \tilde{a}_1 g + k_1 + k_2 - \lambda^2 (i\lambda - \omega_{01}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n}{i\lambda - \tilde{\lambda}_n}, E_n = \frac{2\tilde{a}_n^2}{N_n^2},$$

$$F_2 = A'_2 \lambda^2 + (i\tilde{C}_2 + D_2) \lambda - \tilde{a}_2 g + k_2, \tilde{\lambda}_n = \omega_{01} (1 - \lambda_n), \lambda_n = \frac{2}{\kappa_n}.$$

З урахуванням основного тону коливання ідеальної рідини ($n=1$) рівняння (4.13) буде мати вигляд (2.15). Перепишемо це рівняння наступним чином:

$$a_5 \lambda^5 + (a_4 + ib_4) \lambda^4 + (a_3 + ib_3) \lambda^3 + (a_2 + ib_2) \lambda^2 + (a_1 + ib_1) \lambda + a_0 + ib_0 = 0. \quad (4.14)$$

Тут

$$\begin{aligned} a_5 &= A_1^* A'_2 - \mu^2 = (A_1 - E_1) A_2 + \tilde{A}_2 s_1^2 m_2 > 0, b_5 = 0, \\ a_4 &= A_1^* D_2 + A'_2 D_1, b_4 = \tilde{C}_1^* A'_2 + \tilde{C}_2 A_1^* + (A'_1 A'_2 - \mu^2) \tilde{\lambda}_1, \\ a_3 &= D_1 D_2 - \tilde{C}_1 \tilde{C}_2 + (k_2 - \tilde{a}_2 g) A'_1 + (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) A'_2 - (\tilde{C}_1 A'_2 + \tilde{C}_2 A'_1) \tilde{\lambda}_1, \\ b_3 &= \tilde{C}_2 D_1 + C_1^* D_2 + (A'_1 D_2 + A'_2 D_1) \tilde{\lambda}_1, \\ a_2 &= (k_2 - \tilde{a}_2 g) D_1 + (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) D_2 - (\tilde{C}_2 D_1 + \tilde{C}_1 D_2) \tilde{\lambda}_1, \\ b_2 &= \tilde{C}_1^* (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) + \tilde{C}_2 (k_2 - \tilde{a}_2 g) + \\ &+ [D_1 D_2 - \tilde{C}_1 \tilde{C}_2 + A'_1 (k_2 - \tilde{a}_2 g) + A'_2 (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g)] \tilde{\lambda}_1', \\ a_1 &= (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) (k_2 - \tilde{a}_2 g) - [(k_2 - \tilde{a}_2 g) \tilde{C}_1 + (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) \tilde{C}_2] \tilde{\lambda}_1, \\ b_1 &= [(k_2 - \tilde{a}_2 g) D_1 + (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) D_2] \tilde{\lambda}_1, \\ a_0 &= 0, b_0 = (k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) (k_2 - \tilde{a}_2 g) \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_1 = (1 - \lambda_1) \omega_{01}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

$\tilde{A}_2$ – момент інерції тіла S_2 відносно його центру мас.

З рівняння (4.13) слідує, що коли центр мас другого тіла збігається з точкою O_2 ($c_2 = 0, \tilde{a}_2 = 0, \mu = 0$) і відсутній пружний відновлювальний момент ($k_2 = 0$), то в цьому випадку це рівняння розпадається на два рівняння і відсутній взаємовплив першого тіла на друге і тому стабілізація стає неможливою.

Як і раніше для того, щоб всі нулі рівняння (4.14) лежали у відкритій лівій півплощині, згідно критерію Льєнара – Шіпара, записаного в іннормному вигляді [65, с.31],

необхідно і достатньо, щоб матриця дев'ятого порядку, складена з коефіцієнтів многочлена (4.14) була іннорно-позитивною, тобто були позитивно визначені матриці $\Delta_1, \Delta_3, \Delta_5, \Delta_7$ і Δ_9 :

$$I_1 = |\Delta_1| = a_4 = A_1^* D_2 + A_2' D_1 > 0, \quad (4.16)$$

$$I_3 = |\Delta_3| = \begin{vmatrix} a_5 & -b_4 & -a_3 \\ 0 & a_4 & -b_3 \\ a_4 & -b_3 & -a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad (4.17)$$

$$I_5 = |\Delta_5| = \begin{vmatrix} a_5 & -b_4 & -a_3 & b_2 & a_1 \\ 0 & a_5 & -b_4 & -a_3 & b_2 \\ 0 & 0 & a_4 & -b_3 & -a_2 \\ 0 & a_4 & -b_3 & -a_2 & b_1 \\ a_4 & -b_3 & -a_2 & b_1 & a_0 \end{vmatrix} > 0, \quad (4.18)$$

$$I_7 = |\Delta_7| = \begin{vmatrix} a_5 & -b_4 & -a_3 & b_2 & a_1 & -b_0 & 0 \\ 0 & a_5 & -b_4 & -a_3 & b_2 & a_1 & -b_0 \\ 0 & 0 & a_5 & -b_4 & -a_3 & b_2 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & -b_3 & -a_2 & b_1 \\ 0 & 0 & a_4 & -b_3 & -a_2 & b_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & -b_3 & -a_2 & b_1 & a_0 & 0 \\ a_4 & -b_3 & -a_2 & b_1 & a_0 & 0 & 0 \end{vmatrix} > 0, \quad (4.19)$$

$$I_9 = |\Delta_9| = \begin{vmatrix} a_5 & -b_4 & -a_3 & b_2 & a_1 & -b_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_5 & -b_4 & -a_3 & b_2 & a_1 & -b_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_5 & -b_4 & -a_3 & b_2 & a_1 & -b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 & -b_4 & -a_3 & b_2 & a_1 & -b_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 & -b_3 & -a_2 & b_1 & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & -b_3 & -a_2 & b_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & -b_3 & -a_2 & b_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & -b_3 & -a_2 & b_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & -b_3 & -a_2 & b_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} > 0. \quad (4.20)$$

Так як $I_1 > 0$, то асимптотична стійкість рівномірних обертань в середовищі з опором двох гіроскопів Лагранжа, один із яких має рідину, визначається чотирма нерівностями (4.17) – (4.20).

4.2.1 Умови стабілізації за допомогою кінетичного моменту другого гіроскопу $\tilde{C}_2 = C_2 \omega_{02}$

Стабілізувати нестійке рівномірне обертання гіроскопа з рідиною можна за допомогою кінетичного моменту другого гіроскопа $\tilde{C}_2$ ($\tilde{C}_2 = C_2 \omega_{02}$), розташуванням його центру мас і коефіцієнтів пружності сферичних шарнірів k_1 і k_2 .

Таким чином, умови стабілізації відносно кінетичного моменту $\tilde{C}_2$ запишуться таким чином:

$$\begin{aligned} I_{32}\tilde{C}_2^2 + I_{31}\tilde{C}_2 + I_{30} &> 0, \\ I_{54}\tilde{C}_2^4 + I_{53}\tilde{C}_2^3 + \dots + I_{51}\tilde{C}_2 + I_{50} &> 0, \\ I_{76}\tilde{C}_2^6 + I_{75}\tilde{C}_2^5 + \dots + I_{71}\tilde{C}_2 + I_{70} &> 0, \\ (\tilde{I}_{96}\tilde{C}_2^6 + \tilde{I}_{95}\tilde{C}_2^5 + \dots + \tilde{I}_{91}\tilde{C}_2 + \tilde{I}_{90})(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g)(k_2 - \tilde{a}_2 g) &> 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Тут

$$\begin{aligned} I_{32} &= D_1 g_3, \quad I_{54} = I_{32} D_1 (f_5 + h_5), \quad I_{76} = I_{32} D_1^2 \tilde{\lambda}_1^2 f_5 h_5, \\ I_{96} &= I_{32} D_1^2 \tilde{\lambda}_1^4 f_5^2 h_5, \quad g_3 = A_1^{*2} D_2 + \mu^2 D_1 > 0, \quad f_5 = k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g, \\ h_5 &= E_1 \tilde{\lambda}_1 (\tilde{\lambda}_1 - \omega_{01}) = E_1 \lambda_1 \omega_{01}^2 (\lambda_1 - 1). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Інші коефіцієнти не наведено через їхню громіздкість.

4.2.2 Умови стабілізації відносно пружності сферичних шарнірів k_1 і k_2

Знайдемо умови на величини коефіцієнтів пружних моментів k_1 і k_2 , на коефіцієнти $\tilde{a}_1$ і $\tilde{a}_2$, які характеризують розташування центрів мас тіл S_1 і S_2 та на власні значення λ_1 при яких нерівності (4.21) будуть виконуватись при досить великих значеннях кутової швидкості ω_{02} .

Із (4.21) слідує, що коефіцієнти I_{54} , I_{76} , I_{96} будуть додатними при

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g + E_1 \omega_{01}^2 \lambda_1 (\lambda_1 - 1) &> 0, \\ (\lambda_1 - 1)(k_1 + k_2 - \tilde{a}_1 g) &> 0, \\ k_2 &> \tilde{a}_2 g. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Для виконання нерівностей (4.23) достатньо, щоб:

$$k_1 + k_2 > \tilde{a}_1 g, \quad (4.24)$$

$$\lambda_1 > 1, \quad (4.25)$$

$$k_2 > \tilde{a}_2 g. \quad (4.26)$$

Отже, якщо нерівності (4.24) – (4.26) вірні, то старші коефіцієнти у системі нерівностей (4.21) додатні і при досить великих значення кутової швидкості ω_{02} буде можлива стабілізація нестійкого обертання вихідного гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною.

Із нерівностей (4.23) випливає, що основною нерівністю є нерівність (4.25), тому що при її виконанні нерівності (4.23) будуть завжди виконані за допомогою збільшення коефіцієнтів пружності k_1 і k_2 .

У разі еліпсоїдальної порожнини $\lambda_1 = 2/(1 + \beta^2)$, де $\beta = c/a$, a і c – півосі еліпсоїдальної порожнини, причому c – величина півосі, спрямованої вздовж осі обертання [67, 69]. У цьому випадку із нерівності (4.25) витікає, що $c < a$ і еліпсоїдальна порожнина має бути стиснутою вздовж осі обертання.

Коли центр мас другого гіроскопа знаходиться нижче точки O_2 ($c_2 < 0$), то $a_2 < 0$ і стабілізація буде можлива при виконанні умови $k_1 + k_2 > \tilde{a}_1 g$ (див. Рис.4.3)).

Таким чином, стабілізація завжди буде можлива при виконанні умов (4.24)–(4.26), тобто умов на перший тон коливання рідини і на коефіцієнти пружності.

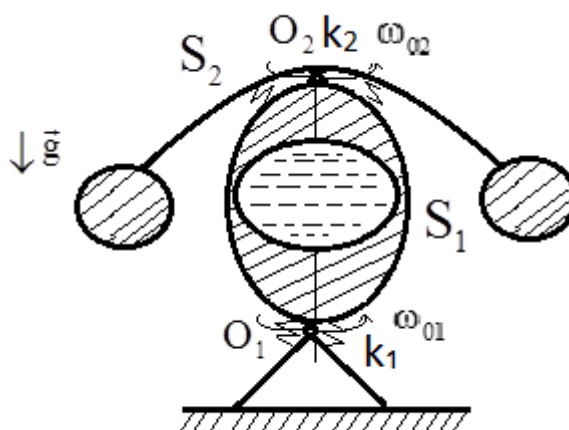


Рис. 4.3 Стабілізація нестійкого обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною за допомогою другого гіроскопа

4.2.3 Умови стабілізації при відсутності дисипативних і постійних моментів

Розглянемо випадок відсутності дисипативних ($D_{ij} = 0, i = 1, 2; j = 1, 3$) і постійних ($Q_i = 0$) моментів і розглянемо можливість стабілізації гіроскопа Лагранжа з рідиною за допомогою другого гіроскопа, який обертається та коефіцієнтів пружності сферичних шарнірів k_1 і k_2 . У цьому випадку характеристичне рівняння (4.14) при $a_2 = a_4 = b_3 = b_1 = 0$ матиме вид:

$$a_5 \lambda^5 + ib_4 \lambda^4 + a_3 \lambda^3 + ib_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + ib_0 = 0. \quad (4.27)$$

Коефіцієнти рівняння (4.27) визначаються за формулами (4.15) в яких потрібно покласти $D_{ij} = 0$.

Стійкість консервативних систем визначаються тим, що корені рівняння (4.27) повинні знаходитися на уявній осі. Для цього в рівнянні (4.27) покладемо $\lambda = i\sigma$ і це рівняння матиме вигляд:

$$a_5 \sigma^5 + b_4 \sigma^4 - a_3 \sigma^3 - b_2 \sigma^2 + a_1 \sigma + b_0 = 0. \quad (4.28)$$

Як і раніше, для того, щоб всі нулі рівняння (4.28) були різні і лежали на дійсній осі, згідно критерію Ляпунова – Шіпара, записаного в інваріантному вигляді [65, с.48], необхідно і достатньо, щоб матриця дев'ятого порядку, яка складена з коефіцієнтів цього рівняння була інваріантно-позитивною, тобто щоб були позитивно визначені матриці $\Delta_1, \Delta_3, \Delta_5, \Delta_7$ і Δ_9 :

$$I_1 = |\Delta_1| = 5a_5 > 0,$$

$$I_3 = |\Delta_3| = \begin{vmatrix} a_5 & b_4 & -a_3 \\ 0 & 5a_5 & 4b_4 \\ 5a_5 & 4b_4 & -3a_3 \end{vmatrix} > 0, \quad (4.29)$$

$$I_5 = |\Delta_5| = \begin{vmatrix} a_5 & b_4 & -a_3 & -b_2 & a_1 \\ 0 & a_5 & b_4 & -a_3 & -b_2 \\ 0 & 0 & 5a_5 & 4b_4 & -3a_3 \\ 0 & 5a_5 & 4b_4 & -3a_3 & -2b_2 \\ 5a_5 & 4b_4 & -3a_3 & -2b_2 & a_1 \end{vmatrix} > 0, \quad (4.30)$$

$$I_7 = |\Delta_7| = \begin{vmatrix} a_5 & b_4 & -a_3 & -b_2 & a_1 & b_0 & 0 \\ 0 & a_5 & b_4 & -a_3 & -b_2 & a_1 & b_0 \\ 0 & 0 & a_5 & b_4 & -a_3 & -b_2 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 5a_5 & 4b_4 & -3a_3 & -2b_2 \\ 0 & 0 & 5a_5 & 4b_4 & -3a_3 & -2b_2 & a_1 \\ 0 & 5a_5 & 4b_4 & -3a_3 & -2b_2 & a_1 & 0 \\ 5a_5 & 4b_4 & -3a_3 & -2b_2 & a_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} > 0, \quad (4.31)$$

$$I_9 = |\Delta_9| = \begin{vmatrix} a_5 & b_4 & -a_3 & -b_2 & a_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_5 & b_4 & -a_3 & -b_2 & a_1 & b_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_5 & b_4 & -a_3 & -b_2 & a_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 & b_4 & -a_3 & -b_2 & a_1 & b_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5a_5 & 4b_4 & -3a_3 & -2b_2 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 5a_5 & 4b_4 & -3a_3 & -2b_2 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 5a_5 & 4b_4 & -3a_3 & -2b_2 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 5a_5 & 4b_4 & -3a_3 & -2b_2 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 5a_5 & 4b_4 & -3a_3 & -2b_2 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} > 0. \quad (4.32)$$

Так як $I_1 > 0$, то стійкість рівномірних обертань двох гіроскопів Лагранжа, один з яких має порожнину з ідеальною рідиною, визначається чотирма нерівностями (4.29) – (4.32).

Так як і раніше, стабілізувати нестійке рівномірне обертання першого гіроскопа можна за допомогою кінетичного моменту другого гіроскопа $\tilde{C}_2$ ($\tilde{C}_2 = C_2 \omega_{02}$), розташуванням його центру мас і коефіцієнтів пружності сферичних шарнірів k_1 і k_2 .

Таким чином, умови стабілізації відносно кінетичного моменту $\tilde{C}_2$ запишуться наступним чином:

$$\begin{aligned} I_{32}\tilde{C}_2^2 + I_{31}\tilde{C}_2 + I_{30} &> 0, \\ I_{54}\tilde{C}_2^4 + I_{53}\tilde{C}_2^3 + \dots + I_{51}\tilde{C}_2 + I_{50} &> 0, \\ I_{76}\tilde{C}_2^6 + I_{75}\tilde{C}_2^5 + \dots + I_{71}\tilde{C}_2 + I_{70} &> 0, \\ I_{98}\tilde{C}_2^8 + I_{97}\tilde{C}_2^7 + \dots + I_{91}\tilde{C}_2 + I_{90} &> 0. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Тут

$$I_{32} = 2a_4 A_1^{*2} > 0, \quad I_{54} = a_4 A_1^{*2} f_5, \quad I_{76} = a_4 A_1^{*2} f_7, \quad I_{98} = a_4 A_1^{*2} \tilde{\lambda}_1^2 (k_1 + k_2 - a_1 g)^2 f_9,$$

$$f_5 = 8A_1^*k_1 + f_{50} = 8A_1^*k_2 + \tilde{f}_{50},$$

$$f_7 = 4A_1^*k_1^3 + f_{72}k_1^2 + f_{71}k_1 + f_{70} = 4A_1^*k_2^3 + \tilde{f}_{72}k_2^2 + \tilde{f}_{71}k_2 + \tilde{f}_{70},$$

$$f_9 = 4A_1^*k_1^3 + f_{92}k_1^2 + f_{91}k_1 + f_{90} = 4A_1^*k_2^3 + \tilde{f}_{92}k_2^2 + \tilde{f}_{91}k_2 + \tilde{f}_{90}.$$

Коефіцієнт I_{54} є лінійним відносно k_1 і k_2 з додатними коефіцієнтами при першій степені, а коефіцієнти I_{76} і I_{98} є кубічними багаточленами відносно k_1 і k_2 з додатними коефіцієнтами при старших степенях. Таким чином, при досить великих значення k_1 або k_2 коефіцієнти I_{76} і I_{98} будуть додатні.

Отже, за досить великих значень кінетичного моменту і одного з відновлювальних моментів або обох цих моментів нерівності (4.33) будуть виконані і буде можлива стабілізація нестійкого обертання твердого тіла з рідиною. Слід зазначити, що центр мас другого гіроскопа може мати довільне розташування, а у випадку еліпсоїдальної порожнини вона може бути не тільки стиснута, а й витягнута. При $k_1 = 0$ отримані результату співпадають з результатами робіт [22, 707].

Таким чином, у випадку наявності дисипації стабілізація завжди буде можлива при виконанні умови на перший тон коливання ідеальної рідини. Так, наприклад, еліпсоїдальна порожнина повинна бути стиснута. При відсутності дисипації еліпсоїдальна порожнина може бути не тільки стиснута, але й витягнута. У цьому є принципова різниця в цих двох випадках.

4.3 Стійкість обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною на підвісі

Узагальним результати підрозділу 3.3 на випадок гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною (див. Рис. 4.4).

Задача про обертання твердого тіла з рідиною на підвісі є подальшим узагальненням класичної задачі про обертання твердого тіла з рідиною навколо нерухомої точки. Обидві ці задачі мають велике наукове та прикладне значення. Однак одержати аналітичне рішення цих задач у загальному вигляді неможливо. Тому на практиці знайшов широке застосування струнний привід для проведення експериментальних

досліджень з перевірки основних теоретичних положень та досліджень впливу рідини на стійкість обертання твердого тіла.

У даному підрозділі на відміну від розділів 2,3 були застосовані кути Крилова. З урахування основного тону коливання ідеальної рідини в довільній осесиметричній порожнині отримані умови асимптотичної стійкості рівномірних обертань у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа з рідиною на підвісі. На підставі критерія Льєнара–Шіпара, записаного в іннорному вигляді, отримані умови асимптотичної стійкості у вигляді системи чотирьох нерівностей відповідно кутової швидкості ω ($x = \omega^2$) і коефіцієнтів пружності шарнірів k_i ($i = 1, 2$). Відповідно кутової швидкості ці нерівності мають 12, 10, 6 і 2 степені, а відповідно коефіцієнтів пружності шарнірів $-7, 5, 3$ і 1 степені. Розглянуто різні випадки відсутності одного або другого постійного моменту, відродження підвісу у струну та випадок відсутності рідини. У випадку відсутності постійного моменту в інерціальній системі відліку показано, що коли основний тон коливання ідеальної рідини $\lambda_1 > 1$, то при зростанні пружності в сферичному шарнірі та в шарнірі Гука завжди буде можлива асимптотична стійкість при будь-якій кутовій швидкості і при любых параметрах механічної системи. Для еліпсоїдальної порожнини це означає, що вона повинна бути стиснута.

Отримані результати узагальнюють відомі результати про стійкість рівномірних обертань на струні гіроскопа Лагранжа з еліпсоїдальної та циліндричної порожнини з ідеальною рідиною [64, 84, 79, 85] на випадок довільної осесиметричної порожнини, на випадок дії дисипативних моментів та двох постійних моментів, дії відновлюючих пружних шарнірів і масових та інерційних характеристик підвісу. Зроблено порівняння отриманих умов стійкості з умовами стійкості за відсутності дисипації.

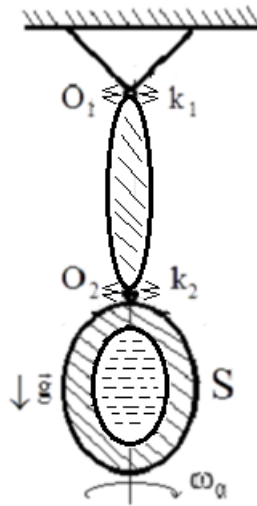


Рис. 4.4 - Гіроскоп Лагранжа з ідеальною рідиною на підвісі

4.3.1. Постановка задачі. Основні рівняння.

Постановка задачі була сформульована в підрозділі 3.3.1. Слід тільки зауважити, що тверде тіло S_2 має осесиметричну порожнину τ , яка повністю заповнена ідеальною нестисливою рідиною густини ρ .

Нехай тверде тіло S_1 (підвіс) має нерухому точку O_1 в якій на нього діє пружний відновлювальний сферичний шарнір $L_1 = k_1 \mathbf{v} \times \mathbf{s} / |\mathbf{s}|$, $k_1 \geq 0$. Динамічно симетричні тверді тіла S_1 і S_2 пов'язані в точці O_2 також пружним відновлювальним сферичним шарніром $L_2 = k_2 \mathbf{s} \times \mathbf{c}_2 / (|\mathbf{s}| |\mathbf{c}_2|)$, $k_2 \geq 0$. Тверде тіло S_i ($i=1,2$) знаходиться під дією сили тяжіння і дисипативного моменту $\mathbf{M}_i = \mathbf{D}_i \boldsymbol{\omega}_i$, $\mathbf{D}_i = \text{diag}(D_{i1}, D_{i1}, D_{i3})$, $D_{ij} > 0$; $i=1,2$; $j=1,3$, що моделює середовище з опором. Нехай тверде тіло S_2 знаходиться також під дією постійного моменту в неінерційній системі відліку $\mathbf{M}_q = Q \mathbf{e}_3^2$, який спрямований вздовж осі симетрії цього тіла та під дією постійного моменту в інерційній системі відліку $\mathbf{M}_p = P \mathbf{g} / |\mathbf{g}|$. Ці моменти підтримують обертання тіла S_2 . Тут $\boldsymbol{\omega}_i$ – кутова швидкість твердого тіла S_i , $\mathbf{s} = \overrightarrow{O_1 O_2}$, $\mathbf{c}_i = \overrightarrow{O_i C_i}$, C_i – центр мас тіла S_i , $\mathbf{g}$ – вектор прискорення вільного падіння (Рис. 4.4).

Рівняння обертання в середовищі з опором двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа, один з яких має порожнину з ідеальною рідиною, матимуть вигляд [103, 110, 25]:

$$(J_1 \cdot \omega_1)' + m_2 s \times (\omega_1 \times s + \omega_2 \times c_2)' = (m_1 c_1 + m_2 s) \times g + L_1 - L_2 + M_{1q} - D_1 \omega_1,$$

$$(J_2 \cdot \omega_2 + \lambda)' + m_2 c_2 \times (\omega_1 \times s + \omega_2 \times c_2)' = m_2 c_2 \times g + L_2 + M_p + M_q - D_2 \omega_2. \quad (4.34)$$

Тут $J_i = \text{diag}(A_i, A_i, C_i)$ – тензор інерції твердого тіла S_i відносно точки O_i ; m_i – маса; так як тверде тіло S_2 має порожнину з рідиною, то при обчисленні моментів інерції A_2 і C_2 , маси m_2 та центру мас C_2 необхідно враховувати моменти інерції рідини та її масу, $\lambda = \rho \int_{\tau} \mathbf{r} \times \mathbf{u} d\tau$ – гіростатичний момент рідини; $\mathbf{u}$ – вектор відносної швидкості рідини в порожнині τ .

Як і раніше зв'яжемо з кожним із тіл S_i незмінно базис $\mathbf{e}_1^i \mathbf{e}_2^i \mathbf{e}_3^i$ з вершиною в точці O_i , осі якого направимо по головних осях тензора інерції J_i і введемо нерухомий базис $\mathbf{e}_1^0 \mathbf{e}_2^0 \mathbf{e}_3^0$, вектор $\mathbf{e}_3^0$ якого збігається з векторами $\mathbf{v}$. Нехай $\mathbf{s} = s \mathbf{e}_3^1$ ($s \geq 0$), $\mathbf{c}_i = c_i \mathbf{e}_3^i$ ($c_i \geq 0$).

Векторні рівняння (4.34) в кутах Крилова $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ відносно інерціальної системи $\mathbf{e}_1^0 \mathbf{e}_2^0 \mathbf{e}_3^0$ запишуться наступним чином [58, 156, 24]:

$$\begin{aligned} A'_1(\ddot{\beta}_i + \dot{\alpha}_i^2 \sin \beta_i \cos \beta_i) + C_i r_i \dot{\alpha}_i \cos \beta_i + \mu \beta_{ki} + (Q_1 \cos \gamma_i - Q_2 \sin \gamma_i) \delta_{i2} = \\ = -\tilde{a}_i g \sin \beta_i \cos \alpha_i + k_i (\alpha_{32}^{i-1,i} \cos \gamma_i + \alpha_{31}^{i-1,i} \sin \gamma_i) + \\ + k_{i+1} (\alpha_{32}^{i+1,i} \cos \gamma_i + \alpha_{31}^{i+1,i} \sin \gamma_i) - D_{i1} \dot{\beta}_i - \alpha_{31}^{02} \delta_{i2} P, \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} A'_1(\ddot{\alpha}_i \cos \beta_i - 2\dot{\alpha}_i \dot{\beta}_i \sin \beta_i) - C_i r_i \dot{\beta}_i + \mu \alpha_{ki} + (Q_1 \sin \gamma_i - Q_2 \cos \gamma_i) \delta_{i2} = \\ = -\tilde{a}_i g \sin \alpha_i + k_i (\alpha_{32}^{i-1,i} \sin \gamma_i + \alpha_{31}^{i-1,i} \cos \gamma_i) + \\ + k_{i+1} (\alpha_{32}^{i+1,i} \sin \gamma_i + \alpha_{31}^{i+1,i} \cos \gamma_i) - D_{i1} \dot{\alpha}_i \cos \beta_i - \alpha_{31}^{02} \delta_{i2} P, \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$C_i \dot{r}_i + Q_3 = -D_{i3} r_i + Q_i - \alpha_{33}^{i0} \delta_{i3} P, \quad (i=1, 2). \quad (4.37)$$

Де $A'_1 = A_1 + s^2 m_2$, $A'_2 = A_2$, $\mu = s \tilde{a}_2$, $\tilde{a}_1 = m_1 c_1 + m_2 s$, $\tilde{a}_2 = m_2 c_2$, $r_i = \dot{\gamma}_i - \dot{\alpha}_i \sin \beta_i$, p_i, q_i, r_i – проекції вектора кутової швидкості ω_i твердого тіла S_i на осі $\mathbf{e}_1^i \mathbf{e}_2^i \mathbf{e}_3^i$, $Q_j = (\omega_2 \times \lambda + \dot{\lambda}) \cdot \mathbf{e}_j^2$, δ_{ij} – символ Кронекера;

$$\alpha_{\mu\kappa}^{ij} = \mathbf{e}_{\mu}^i \cdot \mathbf{e}_{\kappa}^j, \mathbf{e}_{\mu}^i = \sum_{\kappa=1}^3 \alpha_{\mu\kappa}^{i0} \mathbf{e}_{\kappa}^0, \alpha_{\mu\kappa}^{ij} = \sum_{\sigma=1}^3 \alpha_{\mu\sigma}^{i0} \alpha_{\kappa\sigma}^{j0},$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{11}^{i0} &= \cos \alpha_i \cos \gamma_i + \sin \alpha_i \sin \beta_i \sin \gamma_i, \quad \alpha_{21}^{i0} = \cos \beta_i \sin \gamma_i, \\
\alpha_{31}^{i0} &= -\sin \alpha_i \cos \gamma_i + \cos \alpha_i \sin \beta_i \sin \gamma_i, \quad \alpha_{12}^{i0} = -\cos \alpha_i \sin \gamma_i + \sin \alpha_i \sin \beta_i \cos \gamma_i, \\
\alpha_{22}^{i0} &= \cos \beta_i \cos \gamma_i, \quad \alpha_{13}^{i0} = \sin \alpha_i \cos \beta_i, \quad \alpha_{32}^{i0} = \sin \alpha_i \sin \gamma_i + \cos \alpha_i \sin \beta_i \cos \gamma_i, \\
\alpha_{13}^{i0} &= \sin \alpha_i \cos \beta_i, \quad \alpha_{23}^{i0} = -\sin \beta_i, \quad \alpha_{33}^{i0} = \cos \alpha_i \cos \beta_i.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Коефіцієнти $\alpha_{32}^{21}, \alpha_{31}^{21}, \alpha_{32}^{12}, \alpha_{31}^{32}, \alpha_{32}^{12}$, що входять в рівняння (4.35), визначаються з виразів (4.38).

Система (4.35) – (4.36) допускає розв'язки $\alpha_i = \beta_i = 0, \gamma_i = \omega_{0i}t$, $r_i = \omega_{0i} = (P + Q)/D_{i3}$, $\mathbf{u} = 0$ ($Q_j = 0$), які відповідають рівномірним обертанням твердих тіл S_i з кутовими швидкостями ω_{0i} навколо вертикалі.

Нехай в збуреному русі $\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}_{0i} + \boldsymbol{\Omega}_i$, де $|\boldsymbol{\Omega}_i|$ є величина першого порядку малості порівняно з $|\boldsymbol{\omega}_{0i}|$. Як і раніше, у випадку осесиметричної порожнини з ідеальною

рідиною гіростатичний момент $\boldsymbol{\lambda}$ обчислюється за формулою $\boldsymbol{\lambda}_i = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(t) \mathbf{e}_n$,

$\mathbf{e}_n = \rho \int_{\tau} \mathbf{r} \times \mathbf{v}_n d\tau$, $\mathbf{e}_n = (e_n, -ie_n)$. В цьому випадку $Q_2 = iQ_1$, $Q_1 = \sum_{n=1}^{\infty} e_n (\dot{S}_n - i\omega_{02} S_n)$, а ко-

ефіцієнти розкладання $S_n(t)$ знаходяться при розв'язуванні наступної лінійної системи звичайних лінійних диференціальних рівнянь [67, 69, 25]:

$$N_n^2 (\dot{S}_n - i\lambda_n S_n) + \mathbf{e}_n \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}}_2 = 0, \quad (n=1, 2, 3, \dots, \infty). \tag{4.39}$$

Нехай $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega = (P + Q)/D_3$. Це може бути, коли в точці O_2 діє шарнір Гука і $D_{13} = D_{23} = D_3$. Можливість заміни сферичного шарніру на шарнір Гука обговорювалась в роботі [156].

Зберігаючи для змінних їх колишні позначення, запишемо лінеаризовані рівняння збуреного руху:

$$\begin{aligned}
A_i' \ddot{\beta}_i + \tilde{C}_i \dot{\alpha}_i + \mu \ddot{\beta}_j + Q_1 e^{-i\gamma_i} \delta_{i2} &= -D_{i1} \dot{\beta}_i - (\tilde{a}_i g + k_i + k_{i+1}) \beta_i - P \delta_{i2} \alpha_i, \\
A_i' \ddot{\alpha}_i + \tilde{C}_i \dot{\beta}_i + \mu \ddot{\alpha}_j + iQ_1 e^{-i\gamma_i} \delta_{i2} &= -D_{i1} \dot{\alpha}_i - (\tilde{a}_i g + k_i + k_{i+1}) \alpha_i, \\
(i=1, 2, j=3-i).
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Нехай $u_i = \beta_i - i\alpha_i$, $S'_n = e^{-i\gamma_i} S_n$ тоді рівняння (4.39) – (4.40) приймуть вигляд:

$$\begin{aligned}
& \dot{S}'_n + i(\omega - \lambda_n)S'_n + (\ddot{u}_2 + i\omega\dot{u}_2)e_n / N_n^2 = 0 \quad (n=1, 2, \dots), \\
& A'_1\ddot{u}_i + (i\tilde{C}_i + D_{i1})\dot{u}_i + \mu\ddot{u}_j + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_{in}\dot{S}'_{in} = (\tilde{a}_i g - k_i - k_{i-1} - iP_i)u_i, \\
& (i=1, 2, j=3-i),
\end{aligned} \tag{4.41}$$

де $\tilde{C}_i = C_i\omega_{0i}$, $D_i = D_{i1}$.

Представивши шукані функції у вигляді $a e^{\lambda t}$, запишемо характеристичне рівняння збуреного руху (4.41) у вигляді:

$$\begin{vmatrix} F_1 & \mu\lambda^2 \\ \mu\lambda^2 & F_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{4.42}$$

Тут

$$\begin{aligned}
F_1 &= A'_1\lambda^2 + (i\tilde{C}_1 + D_1)\lambda + \tilde{a}_1 g + k_1 + k_2, \quad E_n = 2e_n^2 / N_n^2 > 0, \\
F_2 &= A'_2\lambda^2 + (i\tilde{C}_2 + D_2)\lambda + \tilde{a}_2 g + k_2 + iP - (i\lambda - \omega)\lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n}{i\lambda - \tilde{\lambda}_n}, \\
\tilde{\lambda}_n &= (1 - \lambda_n)\omega, \quad \lambda_n > 0.
\end{aligned}$$

Як і раніше будемо розглядати вплив тільки основного тону коливання рідини λ_1 тоді рівняння при $n=1$ (4.42) перепишемо у вигляді:

$$a_5\lambda^5 + (a_4 + ib_4)\lambda^4 + \dots + (a_1 + ib_1)\lambda + a_0 + ib_0 = 0 \tag{4.43}$$

Тут

$$\begin{aligned}
a_5 &= A'_1 A_2^* - \mu^2 = A_1 A_2^* + (\tilde{A}_2 - E_1)s_1^2 m_2 > 0, \text{ так як, } \tilde{A}_2 - E_1 > 0 [67, 69], \\
b_5 &= 0, \quad a_4 = A_2^* D_1 + A'_1 D_2, \quad b_4 = (A'_1 A_2^* - \mu^2)\tilde{\lambda}_1 + C_2^* A'_1 + \tilde{C}_1 A_2^*, \\
a_3 &= -[\tilde{C}_1 A'_2 + \tilde{C}_2 A'_1]\tilde{\lambda}_1 - C_2^* \tilde{C}_1 + (k_1 + k_2 + \tilde{a}_1 g)A_2^* + (k_2 + \tilde{a}_2 g)A'_1 + D_1 D_2, \\
b_3 &= [A'_1 D_2 + A'_2 D_1]\tilde{\lambda}_1 + C_2^* D_1 + P A'_1 + \tilde{C}_1 D_2, \\
a_2 &= -[P A'_1 + \tilde{C}_1 D_2 + \tilde{C}_2 D_1]\tilde{\lambda}_1 + (k_2 + \tilde{a}_2 g)D_1 + (k_1 + k_2 + \tilde{a}_1 g)D_2 - P C_2^*, \\
b_2 &= [(k_1 + k_2 + \tilde{a}_1 g)A'_2 + (k_2 + \tilde{a}_2 g)A'_1 - \tilde{C}_1 \tilde{C}_2 + D_1 D_2]\tilde{\lambda}_1 + \\
&+ (k_2 + \tilde{a}_2 g)\tilde{C}_1 + (k_1 + k_2 + \tilde{a}_1 g)C_2^* + P D_1
\end{aligned} \tag{4.44}$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= \left[-(k_1 + k_2 + \tilde{a}_1 g) \tilde{C}_2 - (k_2 + \tilde{a}_2 g) \tilde{C}_1 + P D_1 \right] \tilde{\lambda}_1 + (k_2 + \tilde{a}_2 g)(k_1 + k_2 + \tilde{a}_1 g), \\
b_1 &= \left[(k_1 + k_2 + \tilde{a}_1 g) D_2 + (k_2 + \tilde{a}_2 g) D_1 - P \tilde{C}_1 \right] \tilde{\lambda}_1 + P(k_1 + k_2 + \tilde{a}_1 g), \\
a_0 &= -(k_1 + k_2 + \tilde{a}_1 g) P \tilde{\lambda}_1, \quad b_0 = (k_2 + \tilde{a}_2 g)(k_1 + k_2 + \tilde{a}_1 g) \tilde{\lambda}_1.
\end{aligned}$$

$$A_2^* = A'_2 - E_1 > 0, \quad C_2^* = (C_2 - E_1) \omega,$$

$\tilde{A}_2$ – момент інерції тіла S_2 відносно його центру мас.

4.3.2. Умови асимптотичної стійкості рівномірних обертань у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною на підвісі

Критерій існування асимптотичної стійкості рішень рівняння (4.43) такий самий як і у пункті 4.2, та записується в інваріантному вигляді системи п'яти нерівностей (4.16) – (4.20).

Так як $I_1 = a_4 = A'_1 D_2 + A_2^* D_1 > 0$, то асимптотична стійкість рівномірних обертань в середовищі з опором гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною на підвісі визначається чотирма нерівностями (4.17) – (4.20).

Умови асимптотичної стійкості можуть бути представлені у вигляді системи чотирьох нерівностей відносно кутової швидкості ω ($P = \omega D_3 - Q$) або коефіцієнтів пружності шарнірів k_i ($i=1,2$):

$$\begin{aligned}
I_{32} \omega^2 + I_{31} \omega + I_{30} &> 0, \quad I_{56} \omega^6 + I_{55} \omega^5 + \dots + I_{51} \omega + I_{50} > 0, \\
I_{710} \omega^{10} + I_{79} \omega^9 + \dots + I_{71} \omega + I_{70} &> 0, \quad I_{912} \omega^{12} + I_{911} \omega^{11} + \dots + I_{91} \omega + I_{90} > 0,
\end{aligned} \tag{4.45}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_{31} k_1 + \tilde{I}_{30} &> 0, \quad \tilde{I}_{53} k_1^3 + \tilde{I}_{52} k_1^2 + \tilde{I}_{51} k_1 + \tilde{I}_{50} > 0, \\
\tilde{I}_{75} k_1^5 + \tilde{I}_{74} k_1^4 + \dots + \tilde{I}_{71} k_1 + \tilde{I}_{70} &> 0, \quad \tilde{I}_{97} k_1^7 + \tilde{I}_{96} k_1^6 + \dots + \tilde{I}_{91} k_1 + \tilde{I}_{90} > 0.
\end{aligned} \tag{4.46}$$

$$\begin{aligned}
\hat{I}_{31} k_2 + \hat{I}_{30} &> 0, \quad \hat{I}_{53} k_2^3 + \hat{I}_{52} k_2^2 + \hat{I}_{51} k_2 + \hat{I}_{50} > 0, \\
\hat{I}_{76} k_2^6 + \hat{I}_{75} k_2^5 + \dots + \hat{I}_{71} k_2 + \hat{I}_{70} &> 0, \quad \hat{I}_{98} k_2^8 + \hat{I}_{97} k_2^7 + \dots + \hat{I}_{91} k_2 + \hat{I}_{90} > 0.
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Зважаючи на громіздкість отриманих коефіцієнтів, розглянемо низку окремих випадків, які мають і самостійний інтерес.

1. *Випадок відсутності постійного моменту у інерційній системі відліку* ($Q = 0$). У цьому разі $\omega = P/D_3$, у коефіцієнтах (4.44) треба покласти $P = \omega D_3$ і від умов стійкості не змінюється та має вигляд (4.45) – (4.47).

2. *Випадок відсутності постійного моменту у неінерційній системі відліку* ($P = 0$). У цьому разі $\omega = Q/D_3$, у коефіцієнтах (4.44) треба покласти $P = 0$. Вид умов стійкості (4.46) - (4.47) не змінюється, а умови (4.45) запишуться наступним чином:

$$\begin{aligned} I_{32}\omega^2 + I_{31}\omega + I_{30} &> 0, I_{55}\omega^5 + I_{54}\omega^4 + \dots + I_{51}\omega + I_{50} > 0, \\ I_{77}\omega^7 + I_{76}\omega^6 + \dots + I_{71}\omega + I_{70} &> 0, I_{97}\omega^7 + I_{96}\omega^6 + \dots + I_{91}\omega + I_{90} > 0. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Проведемо дослідження умов стійкості (4.46).

Для коефіцієнта пружності k_1 коефіцієнти $\tilde{I}_{31}$, $\tilde{I}_{53}$, $\tilde{I}_{75}$ і $\tilde{I}_{97}$ отримують вигляд:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{31} &= f_3(A_2^*D_1 + A_1'D_2) > 0, \tilde{I}_{53} = D_2f_3^2 > 0, \tilde{I}_{75} = D_2\tilde{I}_{53}(g_7 + h_7), \\ \tilde{I}_{97} &= D_2^3\tilde{\lambda}_1^2f_3^2g_7h_7, f_3 = A_2^{*2}D_2 + \mu^2D_1 > 0, \\ g_7 &= E_2\tilde{\lambda}_1(\tilde{\lambda}_1 - \omega) = E_2\lambda_1(\lambda_1 - 1)\omega^2, h_7 = k_2 + \tilde{a}_2g > 0, \tilde{a}_2 = m_2c_2. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Інші коефіцієнти не наведено через їхню громіздкість.

Знайдемо умови на власні значення λ_1 і на коефіцієнт пружності k_2 при яких нерівності (4.46) виконуватимуться при досить великих значеннях коефіцієнту k_1 .

Із (4.49) випливає, що коефіцієнти $\tilde{I}_{75}$ і $\tilde{I}_{97}$ будуть додатними при $g_7 > 0$ і $h_7 > 0$, тобто при:

$$\lambda_1 > 1 \text{ і } k_2 > -\tilde{a}_2g. \quad (4.50)$$

Таким чином, коли точка підвісу O_2 знаходиться не нижче центру мас тіла S_2 ($c_2 \geq 0$) або нижче ($c_2 < 0$) і $k_2 > -\tilde{a}_2g$, то для довільних значень механічних параметрів системи і для довільної осесиметричної порожнини при збільшенні коефіцієнта пружності k_1 буде можлива асимптотична стійкість, коли $\lambda_1 > 1$.

Для коефіцієнта пружності k_2 (шарнір Гука) із (4.47) слідує, що коефіцієнти $\hat{I}_{31}$, $\hat{I}_{53}$, $\hat{I}_{76}$ і $\hat{I}_{98}$ мають вже більш складний вигляд:

$$\hat{I}_{31} = (A_2^* D_1 + A_1' D_2) [f_3 + \mu^2 (D_1 + D_2)] > 0, \quad \hat{I}_{53} = [f_3 + \mu^2 (D_1 + D_2)] f_5 > 0$$

,

$$\hat{I}_{76} = f_5^2 > 0, \quad \hat{I}_{98} = D_2 E_2 \tilde{\lambda}_1^2 \tilde{\lambda}_1 (\tilde{\lambda}_1 - \omega) f_5^2 = D_2 g_7 f_5^2, \quad f_3 = A_2^{*2} D_2 + \mu^2 D_1 > 0, \quad (4.51)$$

$$f_5 = (A_1' - A_2^*)^2 D_1 D_2 + \mu^2 (D_1^2 + D_2^2) > 0, \quad g_7 = E_2 \lambda_1 (\lambda_1 - 1) \omega^2,$$

$$\tilde{a}_1 = m_1 c_1 + m_2 s, \quad (c_1 \geq 0).$$

Знайдемо умови на власні значення λ_1 при яких нерівності (4.47) виконуватимуться при досить великих значеннях коефіцієнту k_2 .

Із (4.51) випливає, що коефіцієнт $\hat{I}_{98}$ буде додатним при $g_7 > 0$, тобто при

$$\lambda_1 > 1. \quad (4.52)$$

Таким чином, для довільних значень механічних параметрів системи і для довільної осесиметричної порожнини при збільшенні коефіцієнта пружності k_2 буде можлива асимптотична стійкість при $\lambda_1 > 1$.

4.3.3 Випадок відсутності дисипативних і постійних моментів

Розглянемо випадок відсутності дисипативних ($D_{ij} = 0, i=1,2; j=1,3$) і постійних моментів ($P=Q=0$). У цьому випадку характеристичне рівняння (4.43) при $a_2 = a_4 = b_3 = b_1 = 0$ матиме вигляд:

$$a_5 \lambda^5 + i b_4 \lambda^4 + a_3 \lambda^3 + i b_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + i b_0 = 0. \quad (4.53)$$

Коефіцієнти рівняння (4.53) визначаються за формулами (4.44), в яких потрібно прийняти $D_{ij} = 0$ і $P=Q=0$.

Стійкість консервативних систем визначається тим, що корені рівняння (4.53) повинні знаходитися на уявній осі. Для цього в рівнянні (4.53) покладемо $\lambda = i\sigma$ і це рівняння матиме вигляд:

$$a_5 \sigma^5 + b_4 \sigma^4 - a_3 \sigma^3 - b_2 \sigma^2 + a_1 \sigma + b_0 = 0. \quad (4.54)$$

Як і раніше, для того, щоб всі нулі рівняння (4.54) були різні і лежали на дійсній осі, необхідно і достатньо, щоб матриця дев'ятого порядку була іннорно-позитивною, тобто щоб виконувалися нерівності (4.29) – (4.32).

Так як $I_1 = 5a_5 > 0$, то асимптотична стійкість рівномірних обертань гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною на підвісі визначається чотирма нерівностями (4.29) – (4.32).

Умови асимптотичної стійкості можуть бути представлені у вигляді системи чотирьох нерівностей відносно кутової швидкості ω і коефіцієнтів пружності шарнірів k_i ($i=1,2$):

$$\begin{aligned} I_{32}\omega^2 + I_{31}\omega + I_{30} &> 0, I_{56}\omega^6 + I_{55}\omega^5 + \dots + I_{51}\omega + I_{50} > 0, \\ I_{710}\omega^{10} + I_{79}\omega^9 + \dots + I_{71}\omega + I_{70} &> 0, \\ I_{912}\omega^{12} + I_{911}\omega^{11} + \dots + I_{91}\omega + I_{90} &> 0, \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{31}k_1 + \tilde{I}_{30} &> 0, \tilde{I}_{53}k_1^3 + \tilde{I}_{52}k_1^2 + \tilde{I}_{51}k_1 + \tilde{I}_{50} > 0, \\ \tilde{I}_{75}k_1^5 + \tilde{I}_{74}k_1^4 + \dots + \tilde{I}_{71}k_1 + \tilde{I}_{70} &> 0, \tilde{I}_{97}k_1^7 + \tilde{I}_{96}k_1^6 + \dots + \tilde{I}_{91}k_1 + \tilde{I}_{90} > 0, \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} \hat{I}_{31}k_2 + \hat{I}_{30} &> 0, \hat{I}_{53}k_2^3 + \hat{I}_{52}k_2^2 + \hat{I}_{51}k_2 + \hat{I}_{50} > 0, \\ \hat{I}_{76}k_2^6 + \hat{I}_{75}k_2^5 + \dots + \hat{I}_{71}k_2 + \hat{I}_{70} &> 0, \hat{I}_{910}k_2^{10} + \hat{I}_{99}k_2^9 + \dots + \hat{I}_{71}k_2 + \hat{I}_{70} > 0. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Проведемо дослідження умов стійкості (4.55).

$$\begin{aligned} I_{32} &= a_5 f_3, I_{56} = 3a_5 (C_1 C_2^*)^2 f_5, \\ I_{710} &= a_5 C_1^4 C_2^2 C_2^* \tilde{\lambda}_1^2 f_5, I_{912} = a_5 C_1^4 (C_2 C_2^*)^2 \tilde{\lambda}_1^4 h_9^2 f_5, \\ f_3 &= 2(A_2^* C_1)^2 - A_1' A_2^* C_1 C_2^* + 2(A_1' C_2^*)^2 + 5\mu^2 C_1 C_2^* > 0, \\ f_5 &= (A_2^* C_1 - A_1' C_2^*)^2 + 4\mu^2 C_1 C_2^* > 0, \\ h_9 &= C_1(k_2 + a_2 g) - C_2(k_1 + k_2 + a_1 g). \end{aligned} \quad (4.58)$$

Із (4.58) випливає, що коефіцієнти $I_{32} > 0$, $I_{56} > 0$, $I_{710} > 0$ і I_{912} додатні. Таким чином, коли значення моментів інерції C_i і A_i ненульові, то при досить великій кутової швидкості будуть виконані нерівності (4.55) і буде можлива стійкість рівномірного обертання гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною на підвісі. У випадку наявності дисипації і постійних моментів ми мали умови стійкості у вигляді нерівностей (4.52), а при відсутності дисипації і постійних моментів і виконанні умов $C_i > 0$,

$A_i > 0$ і $k_i > 0$ ($i=1, 2$) цих умов вже не існує. Це пов'язано з тим, що дисипації руйнують гіроскопічну стабілізацію [139]. У цьому є принципова різниця в цих двох випадках. При відродженні підвісу у безмасову струну ($C_1 = A_1 = m_1 = 0$) ця задача розглядалася багатьма авторами [84, 64, 79, 85].

Проведемо дослідження умов стійкості (4.56).

Для коефіцієнта пружності k_1 коефіцієнти $\tilde{I}_{31}$, $\tilde{I}_{53}$, $\tilde{I}_{75}$ і $\tilde{I}_{97}$ отримують вигляд:

$$\begin{aligned}\tilde{I}_{31} &= (A_2^* D_1 + A_1' D_2) f_3 > 0, \quad \tilde{I}_{53} = D_2 f_3^2 > 0, \\ \tilde{I}_{75} &= 4a_5^2 (A_2^*)^3 h_7, \quad \tilde{I}_{97} = 4a_5^2 (A_2^*)^3 h_9, \\ h_7 &= 3(k_2 + \tilde{a}_2 g) A_2^* + C_2^2 \omega^2 + \left[2(\tilde{\lambda}_1 - \omega) \omega E_1 - A_2^* \omega \tilde{\lambda}_1 \right] + (A_1' \tilde{\lambda}_1 - \omega E_1)^2, \\ h_9 &= 4A_2^* k_2^3 + h_{92} k_2^2 + h_{91} k_2 + h_{90}.\end{aligned}\tag{4.59}$$

Із (4.59) слідує, що вирази h_7 і h_9 будуть додатними при досить великих значеннях k_2 і в цьому разі будуть додатними $\tilde{I}_{31}$, $\tilde{I}_{53}$, $\tilde{I}_{75}$ і $\tilde{I}_{97}$. Таким чином, при досить великих значеннях коефіцієнтів пружності k_1 і k_2 будуть виконані нерівності (4.56).

Для коефіцієнта пружності k_2 (шарнір Гука) із (4.57) слідує, що коефіцієнти $\hat{I}_{31}$, $\hat{I}_{53}$, $\hat{I}_{76}$ і $\hat{I}_{910}$ мають вигляд:

$$\begin{aligned}\hat{I}_{31} &= 5a_5^2 (A_1' + A_2^*) > 0, \quad \hat{I}_{53} = 4a_5^2 (A_1' + A_2^*) h_5, \quad \hat{I}_{75} = 4a_5^2 (A_2^*)^3 h_7, \\ \hat{I}_{910} &= 16a_5^2 h_7^2, \quad h_5 = (3A_1'^2 - 4A_1' A_2^* + 3A_2^{*2} + 10\mu^2), \quad h_7 = (A_1' - A_2^*)^2 + 4\mu^2.\end{aligned}$$

Таким чином, значення коефіцієнтів пружності шарнірів на умови стійкості є основним. Їх збільшенням завжди можна досягти виконання нерівностей (4.55) – (4.57) при $C_i > 0$ і $A_i > 0$ незалежно від наявності рідини та значень інших механічних параметрів системи і буде можлива стійкість рівномірного обертання гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною на підвісі.

4.4 Висновки до розділу 4

Розглянуто можливість стабілізації нестійкого рівномірного обертання в середовищі з опором гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною за допомогою другого гі-

роскопа, який обертається. Показано, що стабілізація буде при збігу центру мас другого гіроскопа з цим шарніром. На основі критерію Льєнара – Шіпара, записаного в іннормному вигляді, отримані умови стабілізації у вигляді системи чотирьох нерівностей відповідно кінетичного моменту другого гіроскопа. Знайдено умови для коефіцієнтів пружності шарнірів, першого тону коливання ідеальної рідини та для положення центрів мас гіроскопів, при яких старші коефіцієнти цих нерівностей позитивні. На прикладі стиснутої еліпсоїдальної порожнини показано, що при досить великій кутовій швидкості обертання другого гіроскопа стабілізація завжди буде можлива зі збільшенням значень коефіцієнтів пружності. Проведено порівняння випадків наявності і відсутності дисипації. Показано, що при відсутності дисипації маса другого гіроскопа може мати довільне розташування, а еліпсоїдальна порожнина може бути не тільки стиснута, а й витягнута. У цьому є принципова різниця в цих двох випадках.

Розглянуто задачу про стійкість рівномірних обертань у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною на підвісі. У випадку відсутності постійного моменту у неінерційній системі відліку, коли точка під $c_2 < 0$ вісу O_2 знаходиться не нижче центру мас тіла S_2 ($c_2 \geq 0$) або нижче () то для довільних значень механічних параметрів системи і для довільної осесиметричної порожнини при збільшенні коефіцієнта пружності k_1 і k_2 ($k_2 > -\tilde{a}_2 g$) буде можлива асимптотична стійкість, при $\lambda_1 > 1$. У випадку відсутності дисипативних і постійних моментів основним на умови стійкості є значення коефіцієнтів пружності шарнірів незалежно від наявності рідини. У цьому є принципова різниця в цих двох випадках.

Отримані результати узагальнюють відомі результати про стійкість рівномірних обертань на струні гіроскопа Лагранжа з еліпсоїдальної та циліндричної порожнинами з ідеальною рідиною [64, 84, 79, 85] на випадок довільної осесиметричної порожнини, на випадок дії дисипативних моментів та двох постійних моментів, дії відновлюючих пружних шарнірів і масових та інерційних характеристик підвісу. Зроблено порівняння отриманих умов стійкості з умовами стійкості за відсутності дисипації.

Слід зазнати, що отримані умови асимптотичної стійкості і необхідні умови стійкості при відсутності дисипації є точним для еліпсоїдальних і софокусно-еліпсоїдальних порожнин і наближеними для всіх інших осесиметричних порожнин для уточнення яких слід враховувати додаткові тони коливання ідеальної рідини, а також слід зазначати, що усі отримані умови асимптотичної стійкості і необхідні умови стійкості при відсутності дисипації прості та зручні для проведення чисельних досліджень.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню асимптотичної стійкості рівномірних обертань у середовищі з опором невільної системи двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа та системи двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа з осесиметричними порожнинами, які повністю заповнені ідеальною нестисливою рідиною. Обертання гіроскопів підтримуються постійними моментами, спрямованими вздовж їх осей симетрій та постійними моментами у інерціальній системі відліку. Перший розділ містить коротку історію вивчення питань, розглянутих в дисертації, а також відомі результати, що використовуються в дисертації. Наведений огляд сучасного стану розв'язання задач динаміки та стійкості обертання у середовищі з опором систем пружно зв'язаних твердих тіл та систем твердих тіл з рідиною свідчить про те, що ці задачі ще не вирішені і потребують подальших аналітичних та чисельних досліджень, оскільки вони мають не тільки теоретичний інтерес, а і велике практичне значення.

У другому розділі наведено постановку задачі про руху у середовищі з опором невільної системи двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа з нестисливою рідиною. На підставі рівнянь руху систем зв'язаних гіростатів П.В. Харламова виведені рівняння руху механічної системи, яка розглядається. На основі функції стану С.Л. Соболева для ідеальної обертової рідини виведені рівняння руху у середовищі з опором системи двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа з довільними осесиметричними порожнинами, що містять ідеальну рідину. Отримано характеристичного рівняння збурених рівномірних обертань двох гіроскопів з рідиною. З урахуванням основного тону коливання ідеальної рідини у довільній осесиметричній порожнині отримано в вигляді полінома шостого ступеня характеристичне рівняння. Розглянуто різні випадки цього рівняння, а саме: випадок відсутності рідини в першому твердому тілі, у другому або у двох твердих тіл, випадок відсутності постійних моментів у інерційній або неінерційній системах відліку, випадок універсального пружного шарніру та випадок відсутності дисипації і постійних моментів. Здобуте характеристичне рів-

няння є точним для еліпсоїдальних і софокусно-еліпсоїдальних порожнин і наближеними для всіх інших осесиметричних порожнин для уточнення яких слід враховувати додаткові тони коливання ідеальної рідини.

В третьому розділі на підставі характеристичного рівняння, виведеного у другому розділі і на основі критерія Ляпунова-Шіпара, записаного у інваріантному вигляді, отримані у вигляді системи трьох нерівностей умови асимптотичної стійкості рівномірних обертань у середовищі з опором системи двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа. Ці умови аналітично (якісно) досліджені на двох задачах: задача про можливість стабілізації нестійкого рівномірного гіроскопа Лагранжа за допомогою другого гіроскопа, який обертається і задача про стійкість рівномірних обертань гіроскопа Лагранжа на підвісі. Показано, що при досить великій кутовій швидкості обертання другого гіроскопа стабілізація завжди буде можлива за допомогою збільшення коефіцієнтів пружності шарнірів. Отримані умови стабілізації порівнюються з аналогічними умовами за відсутності дисипації. Проведено аналітичні дослідження впливу дисипації, постійних моментів, пружності шарнірів, масових та інерційних характеристик підвісу на умови стійкості. Для перевірки отриманих умов асимптотичної стійкості був розглянутий відомий в літературі випадок відродження підвісу у струну. У цьому випадку ми маємо дві умови стійкості. Друга умова стійкості збіглася з відомою умовою, а перша умова у статті була пропущена. Усі отримані умови асимптотичної стійкості і необхідні умови стійкості при відсутності дисипації прості та зручні для проведення чисельних досліджень.

У четвертому розділі узагальнюються основні результати третього розділу на випадок двох гіроскопів Лагранжа, які містять довільну осесиметричну порожнину з ідеальною нестисливою рідиною. З урахуванням основного тону коливання ідеальної рідини отримані у вигляді системи п'яти нерівностей умови асимптотичної стійкості рівномірних обертань. Ці умови виписані відносно кінетичних моментів першого або другого гіроскопів, відносно кутових швидкостей гіроскопів, а також відносно коефіцієнтів пружності сферичних шарнірів. Розглянуті умови стійкості при різних випадках відсутності постійних моментів в інерційній та неінерційній системах відліку, при

випадках виродження сферичних шарнірів у шарнір Гука. Розглянуто можливість стабілізації нестійкого обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною за допомогою другого гіроскопа, який обертається. Отримані достатні умови на коефіцієнти пружності шарнірів і перший тон коливання рідини у довільній осесиметричній порожнині при яких завжди буде можлива стабілізація при великих значеннях кутової швидкості другого гіроскопа. До достатніх умов, які були раніше отримані у третьому розділі додається умова на перший тон коливання рідини, він має бути більше одиниці. На прикладі еліпсоїдальної порожнини показано, що вона повинна бути стиснута вздовж осі обертання. Отримані умови стабілізації порівнюються з аналогічними умовами за відсутності дисипації. Показано, що при відсутності дисипації еліпсоїдальна порожнина може бути не тільки стиснута але й витягнута. У цьому є принципова різниця в цих двох випадках. Розглянуто задачу про стійкість рівномірних обертань на підвісі гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною в середовищі з опором. Проведено аналітичні дослідження впливу рідини, пружності шарнірів, масових та інерційних характеристик підвісу на умови стійкості. Отримані умови порівнюються з умовами стійкості за відсутності дисипації.

У дисертаційній роботі отримані наступні нові результати:

- вперше розглянута задача про стійкість обертання у середовищі з опором системи двох пружно зв'язаних невільних гіроскопів Лагранжа з довільними осесиметричними порожнинами, повністю заповненими ідеальною нестисливою рідиною;
- виведено лічильну систему звичайних диференціальних рівнянь обурених рівномірних обертань у середовищі з опором системи двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа з рідиною та отримано трансцендентне характеристичне рівняння;
- з урахування основного тону коливання ідеальної рідини отримано у вигляді системи п'яти нерівностей умови асимптотичної стійкості рівномірних обертань у середовищі з опором гіроскопів Лагранжа з рідиною;
- умови стійкості аналітично (якісно) досліджені на двох задачах: задача про можливість стабілізації нестійкого рівномірного гіроскопа Лагранжа та гіроскопа

Лагранжа з рідиною за допомогою другого гіроскопа, який обертається і задача про стійкість рівномірних обертань на підвісі гіроскопа Лагранжа та гіроскопа Лагранжа з рідиною;

- отримані достатні умови на коефіцієнти пружності шарнірів і перший тон коливання рідини для яких завжди буде можлива стабілізація при великих значеннях кутової швидкості другого гіроскопа. Перший тон коливання рідини повинен бути більше одиниці;
- на прикладі еліпсоїдальної порожнини показано, що вона повинна бути стиснута вздовж осі обертання;
- оцінено вплив дисипації, рідини, постійних моментів, коефіцієнтів пружності шарнірів та масових і інерційних характеристик підвісу на умови стійкості рівномірних обертань системи гіроскопа Лагранжа та гіроскопа Лагранжа з рідиною;
- проведено порівняння отриманих умов стабілізації з умовами стабілізації за відсутності дисипації і постійних моментів.
- Проведені у роботі теоретичні дослідження ґрунтуються на основних теоремах теоретичної механіки, на рівняннях Ейлера руху ідеальної нестисливої рідини, яка обертається, на відомих рівняннях руху системи гіростатів П.В. Харламова, на функції стану С.Л. Соболева, на теорії стійкості та на критерії Ляпунова-Шіпара, записаного в інваріантному вигляді.

Слід зазначити, що отримані умови асимптотичної стійкості і необхідні умови стійкості при відсутності дисипації є точним для еліпсоїдальних і софокусно-еліпсоїдальних порожнин і наближеними для всіх інших осесиметричних порожнин для уточнення яких слід враховувати додаткові тони коливання ідеальної рідини, а також слід зазначати, що усі отримані умови асимптотичної стійкості і необхідні умови стійкості при відсутності дисипації прості та зручні для проведення чисельних досліджень.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Akulenko, L.D., Zinkevich, Ya.S., Kozachjenko, T.A., Leshenko, D.D.: The evolution of the motions of a rigid body close to the Lagrange case under the action of an unsteady torque, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 81(2), 79–84 (2017) DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2017.08.001
- [2] Akulenko, L.D., Leshchenko, D.D., Paly, K.S.: Perturbed rotational motions of a spheroid with cavity filled with a viscous fluid, *Proc. IMechE Part C* 235(20), 4833–4837 (2021) DOI: 10.1177/0954406220941545
- [3] Akulenko, L.D., Zinkevich, Ya.S., Kozachjenko, T.A., Leshenko, D.D.: The evolution of the motions of a rigid body close to the Lagrange case under the action of an unsteady torque, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 81(2), (2017) DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2017.08.001
- [4] Aslanov, V. S.: *Rigid Body Dynamics for Space Applications*, Butterworth Heinemann Oxford (2017). DOI: 10.1016/C2016-0-01051-3
- [5] Aslanov, V.S., Doroshin, A.V.: The motion of a system of coaxial bodies of variable mass, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 68(6), (2004) DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2004.11.012
- [6] Bauchau, O.A.: *Flexible Multibody Dynamics*, Dordrecht: Springer Netherlands, (2011) DOI: 10.1007/978-94-007-0335-3.
- [7] Bolgrabskaya, I. A.: Stabiliti of permanent rotations of inter-connected rigid bodies system with small asymmetry, *Multibody system dynamics* 6, 56-72 (2001)
- [8] Bolgrabskaya, I.A.: A justification for investigating the dynamic properties of an elastic bar using a model of a system of coupled rigid bodies, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 60(2), 343–347 (1996) DOI: 10.1016/0021-8928(96)00045-7
- [9] Borisov, A.V., Mamaev, I.S.: *Rigid Body Dynamics*, De Gruyter Studies in Mathematical Physics 52, Higher Education Press 520 (2019)
- [10] Chaudhary, H., Saha, S.K.: *Dynamics and balancing of multibody systems*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2009 DOI:10.1007/978-3-540-78179-0
- [11] Chebanov, D.A.: Extract solution for motion equations of symmetric gyros system. *Multibody system dynamics* 6, 39-57 (2001) DOI: 10.1023/A:1011440209880

- [12] Chernousko, F.L., Akulenko, L.D., Leshchenko D.D.: Evolution of motions of a rigid body about its center of mass, Cham: Springer International Publishing, (2017) DOI:10.1007/978-3-319-53928-7
- [13] Dornheim, M.: New Path to Space, Aviation Week & Space Technology 24, 26-30 (2005)
- [14] El-Gohary, Awad.: Control of the rotational motion of the rigid body with the help of internal rotors using Rodrigues–Caley parameters, International Journal of Non-Linear Mechanics 38(2), 133–141 (2003) DOI: 10.1016/s0020-7462(01)00041-5
- [15] El-Gohary, Awad.: Optimal stabilization of a rigid body motion using rotors system, Applied Mathematics and Computation 136(2-3), 229–239 (2003) DOI: 10.1016/s0096-3003(02)00041-3
- [16] Felix, L., Chernousko, L.D., Akulenko, D.D., Leshchenko.: Evolution of motions of a rigid body about its center of mass, Cham: Springer International Publishing, (2017) DOI: 10.1007/978-3-319-53928-7
- [17] Fuller, A.T., Macmillan, R.H.: Conditions for aperiodicity in linear systems. British Journal of Applied Physics 6(12), 450 (1955) DOI: 10.1088/0508-3443/6/12/109.
- [18] Greenspan, H. P.: The theory of rotating fluids, Cambridge U.P., 370 (1968)
- [19] Herbert, T.: Viscous fluid motion in a spinning and nutating cylinder, Journal of Fluid Mechanics 167, 181-198 (1986) DOI: 10.1017/s0022112086002781
- [20] Hough, S.S.: The oscillations of a rotating ellipsoidal shell containing fluid, Philosophical Transactions of the Royal Society of London 186, 469–506 (1895) DOI: 10.1098/rsta.1895.0012
- [21] Ishlinsky, A.Yu.: On the dynamics of a system of rigid bodies, Theor and Appl Mech, 141-149 (1973) DOI: 10.1007/978-3-642-65590-6_10
- [22] Khomyak, T. V. : Stabilization of the unstable spinning of a Lagrange top filled with a fluid, International applied Mechanics 51(6), 702–709 (2015) DOI: 10.1007/s10778-015-0728-0
- [23] Kononov, Y. M., Khomyak, T.V.: On the rotation stabilization of the unstable gyroscope containing fluid by rotating the rigid body, Facta Universitatis. Series Mechanics, Automatic Control and Robotics 17(4), 195-201 (2005)

- [24] Kononov, Y.M., Svyatenko, Y.I.: Stabilization of unstable spinning of a Lagrange gyroscope in a resisting medium by another spinning gyroscope, *Int Appl Mech* 58, 605–612 (2022) DOI: 10.1007/s10778-023-01184-3
- [25] Kononov, Y.M., Svyatenko, Y.I.: Stabilization of a spinning Lagrange gyroscope filled with ideal fluid in a resisting medium, *Int Appl Mech* 59, 207–217 (2023) DOI: 10.1007/s10778-023-01213-1
- [26] Kononov, Y.M.: Stability of a Uniform Rotation of an Asymmetric Rigid Body in a Resisting Medium, *International applied mechanics* 57, 432-439 (2021) DOI: 10.1007/s10778-021-01095-1 Translated from *Prikladnaya Mekhanika*, Vol. 57, No. 4, pp. 68–77, July–August 2021.
- [27] Kononov, Y.N., Khom'yak, T.V.: Stabilization by Rotating Rigid Bodies for Unstable Rotation of a Rigid Body with Cavities Containing a Fluid, *ICTAM04 Warsaw Poland* Published by IPPT PAN, 320 (2004)
- [28] Larson, V.: State equations for an N body spacecraft, *The Journal of the Astronautical Sciences* 1(22), 21-35 (1974)
- [29] Leshchenko, D.D., Ershkov, S.V., Kozachenko, T.A.: Evolution of a heavy rigid body rotation under the action of unsteady restoring and perturbation torques, *Nonlinear Dyn*, 1517–1528 (2021) DOI: 10.1007/s11071-020-06195-0
- [30] Leshchenko, D.D., Ershkov, S.V., Kozachenko, T.A.: Rotations of a rigid body close to the lagrange case under the action of nonstationary perturbation torque, *J. Appl. Comput. Mech.* 3(8), 1023–1031 (2022)
- [31] Leshchenko, D.D., Ershkov, S.V., Kozachenko, T.A.: Rotations of a Rigid Body Close to the Lagrange Case under the Action of Nonstationary Perturbation Torque, *J. Appl. Comput. Mech.* 1(9), (2022)
- [32] Miles, J. W.: Free surface oscillations in a rotating liquid, *Phys. Fluid.* 2(3), 297 (1959) DOI: 10.1063/1.1705926
- [33] Miles, J.W., Troesch, B.A.: Surface oscillations of a rotating liquid, *J. of Applied Mechanic* 28(4), 481-496 (1961) DOI: 10.1115/1.3641773
- [34] Padilla, C. E.: Nonlinear strain displacement relation and flexible multibody dynamics, *Strat. Dyn. And Mater Conf. Mobile* 1, 405-113 (1989)

- [35] Padilla, C.E.: Stress stiffening and approximate equations in flexible multibody dynamics, Hilton Head Island S.C. 1, 154-160 (1992)
- [36] Parks, P.C.: Stability of liquid-filled spinning spheroids via Liapunov's second methods, *Journal of Applied Mechanics* 46(2), 259–262 (1979) DOI: 10.1115/1.3424538
- [37] Peiffer, K., Savchenko, A.Y.: On Passive Stabilization in Critical Cases, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 244(1), 106–119 (2000) DOI: 10.1006/jmaa.1999.6692
- [38] Shabana, A.A.: *Dynamics of Multibody Systems*, Cambridge University Press (2013)
- [39] Stewartson, K.: On the stability of a spinning top containing liquid, *Journal of Fluid Mechanics* 5(04), 577-592 (1959) DOI: 10.1017/s0022112059000404
- [40] Stewartson, K., Roberts, P.H.: On the motion of a liquid in a spheroidal cavity of a precessing rigid body, *Journal of Fluid Mechanics* 17(1), 1–20 (1963) DOI: 10.1017/s0022112063001063
- [41] Stokes, G.G.: On the theory of oscillatory waves, Cambridge, 197-229 (1880)
- [42] Stokes, G.G.: On some cases of fluid motion, *Transactions of the Cambridge philosophical society* 8(1), 105-137 (1844).
- [43] Vaughn, H. R.: Fluid motion inside a spinning nutating cylinder, *Journal of Fluid Mechanics* 150, 121–138 (1985) DOI: 10.1017/s0022112085000052
- [44] Wittenburg, J.: *Dynamics of Multibody Systems*, Springer, (2010)
- [45] Wittenburg, J.: *Dynamics of System of Rigid Bodies*, Stuttgart B. G. Teubner, 307 (1997)
- [46] Zakrzhevskii, A.E.: The dynamics of systems of rigid body and elastic bodies as applied to spacecraft, *Int. Appl. Mech.* 36(8), 1001-1036 (2000)
- [47] Агафонов, С.А.: Две задачи стабилизации стационарного движения неуравновешенного гироскопа в кардановом подвесе, *Изв. РАН. Механика твердого тела* 4, 13-16 (2001)
- [48] Агафонова, С.А., Герман, А.Д.: Стабилизация стационарного движения спутника-гиростата с помощью внешних моментов, *Изв. РАН. Механика твердого тела* 4, 3-6 (2004)

- [49] Акуленко, Л.Д., Лещенко, Д.Д.: Быстрое вращение вокруг неподвижной точки тяжелого гиростата в сопротивляющейся среде, Прикл. Механика 18(3), 102-107 (1982)
- [50] Акуленко, Л.Д.: Эволюция быстрого вращения динамически симметричного спутника под действием гравитационного момента в сопротивляющейся среде, Механика твёрдого тела 36, 58-63 (2006)
- [51] Акуленко, Л.Д., Лещенко, Д.Д., Рачинская, А.Л.: Эволюция быстрого вращения спутника под действием гравитационного момента в среде с сопротивлением, Известия РАН Механика твёрдого тела 2, 13-26 (2008)
- [52] Антоньева, Н.В., Кононов, Ю.М.: Необхідні умови стійкості рівномірного обертання на струнному підвісі дзиги Лагранжа з двошаровою ідеальною рідиною, Вісник ДонНУ. Сер. А 2, 14-19 (2013)
- [53] Асланов, В.С.: Движение вращающегося тела в сопротивляющейся среде, Изв. РАН Мех. тверд. тела 2, 27-39 (2005)
- [54] Болграбская, И. А., Савченко, А.Я.: Об одном методе исследования колебаний вращающихся осесимметричных упругих стержней, Механика твердого тела 16, 68-77 (1984)
- [55] Болграбская И. А. Савченко, А.Я.: Устойчивость равномерных вращений свободной связки п гироскопов Лагранжа, Матем. физ. и нелин. Механика 2(36), 9-14 (1984)
- [56] Болграбская, И.А., Савченко, А.Я.: Устойчивость стационарных движений систем связанных твердых тел, Механика твердого тела 21, 62-73 (1989)
- [57] Болграбская, И.А.,: Устойчивость движения связки двух тел в сопротивляющейся среде, Механика твердого тела 18, 73-77 (1986)
- [58] Болграбская, И.А., Лесина, М.Е., Чебанов, Д.А.: Динамика систем связанных твёрдых тел, Киев Наук. Думка 9, 395 (2012)
- [59] Вархалев, Ю.П., Савченко, А.Я., Светличная Н.В.: К вопросу стабилизации и покоящегося, неуравновешенного гироскопа Лагранжа, Механика твердого тела 14, 105-109 (1992)
- [60] Гантмахер, Ф.Р.: Теория матриц, Наука, 576 (1966).

- [61] Давыдовский, А., Самсонов, В.А.: О возможности гироскопической стабилизации системы твердых тел, Прикл. математика и механика 59(3), 385-390 (1995)
- [62] Денисов, Г.Г., Новиков, В.В.: К проблеме гироскопической стабилизации механических систем, Механика твердого тела 3, 11-15 (2006)
- [63] Дерендяев, Н.В., Сандалов, В.М.: Устойчивость стационарного вращения ротора заполненного стратифицированной вязкой несжимаемой жидкостью, Машиноведение 1, 19-26 (1986)
- [64] Десятов, В.Т.: Экспериментальное исследование устойчивости вращательного движения тел с жидким заполнением, Динамика космических аппаратов и исследование космического пространства, 254-261 (1986)
- [65] Джури, Э.: Инноры и устойчивость динамических систем, М Наука, 299 (1979)
- [66] Докучаев, Л.В.: Движение волчка с конической полостью заполненной идеальной жидкостью, Механика твердого тела 2, 47-52 (1967)
- [67] Докучаев, Л.В.: Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами, М. Машиностроение, 232 (1987)
- [68] Докучаев, Л.В., Рвалов, Р.В.: Об устойчивости вращательных движений твердого тела с жидким наполнением, Труды семинара Динамика упругих и твердых тел взаимодействующих с жидкостью Томск, 81-92 (1972)
- [69] Докучаев, Л.В., Рвалов, Р.В.: Об устойчивости стационарного вращения твердого тела с полостью содержащей жидкость, Изв. АН СССР Механика твердого тела 2, 6-14 (1973)
- [70] Дяченко, М.П.: Колебания тяжелого симметричного волчка с полостью частично заполненной жидкостью, Автореф. дис. канд. физ. мат. наук 01.02.01 Ин-т механики АН УССР, 16 (1972)
- [71] Дяченко, М.П.: Про коливання гіроскопу з порожниною частково заповненою невязкою нестисливою рідиною, ДАН УРСР. Сер. А. 10, 915-919 (1971)
- [72] Жестков, И.Г.: Экспериментальное исследование устойчивости вращения на струне тела с жидкостью, Вестн. МГУ Сер.1 Математика механика 6, 86-89 (1987)

- [73] Зинкевич, Я.С., Лещенко, Д.Д., Рачинская, А.Л.: Быстрые вращения спутника в среде с сопротивлением под действием гравитационного и светового моментов, *Механика твердого тела* 39, 137-150 (2009)
- [74] Иванова, Е.А.: Точное решение задачи о вращении осесимметричного твердого тела в линейной вязкой среде, *Изв. РАН Механика твердого тела* 6, 15-30 (2001)
- [75] Иващенко, Б.П.: Об устойчивости гироскопа с полостью заполненной вязкой жидкостью, *Прикл. механика* 16(6), 142-144 (1980)
- [76] Игнатьев, А.О., Марголис, С.М., Савченко, А.Я.: Исследование областей устойчивости равномерных вращений осесимметричного волчка с жидким заполнением, *Механика твердого тела* 9, 73-81 (1977)
- [77] Игнатьев, А.О., Савченко, А.Я.: Об устойчивости равномерных вращений твердого тела с жидким заполнением, *Матем. физ. и нелин. Механика* 5, 14-18 (1986)
- [78] Ишлинский, А.Ю.: Динамика систем связанных твердых тел, XIII Межд. конгресс по теор. и прикл. Механике М. Наука, 16 (1972)
- [79] Ишлинский, А.Ю., Стороженко, В.А., Темченко, Н.Е.: Исследование устойчивости сложных механических систем, М. Наука, 299 (2002)
- [80] Ишлинский, А.Ю., Малащенко, С.В., Стороженко, В.А.: Метод балансировки вращающихся тел на струнном приводе, *МТТ* 5, 3-18 (1979)
- [81] Ишлинский, А.Ю., Стороженко, В.А., Темченко, М.Е.: О движении осесимметричного твердого тела подвешенного на струне, *Изв. АН СССР МТТ* 6, 3-16 (1979)
- [82] Ишлинский, А.Ю., Темченко, М.Е.: О малых колебаниях вертикальной оси волчка, имеющего полость целиком наполненную идеальной несжимаемой жидкостью, *Журн. прикл. механики и техн. физики* 3, 65-75 (1960)
- [83] Ишлинский, А.Ю., Горбачук, М.Л., Темченко, М.Е.: Об устойчивости вращения на струне осесимметричных твердых тел с полостями заполненными жидкостью, *Динамика космических аппаратов и исследование космического пространства* М. Машиностроение, 234-247 (1986)
- [84] Ишлинский, А.Ю.: Механика идеи задачи приложения, М. Наука, 624 (1985)

- [85] Ишлинский, А.Ю., Стороженко, В.А., Темченко, М.Е.: Вращение твердого тела на струне и смежные задачи, М. Наука, 330 (1991)
- [86] Карапетян, А. В.: К задаче гироскопической стабилизации, Вестн МГУ 1(2), 49-52 (2005)
- [87] Карапетян, А.В., Лагутина, И.С.: О влиянии диссипативного и постоянного моментов на вид и устойчивость стационарных движений механических систем с циклическими координатами, ПММ 62(4), 539-547 (1998)
- [88] Карапетян, А.В.: Об устойчивости регулярной прецессии симметричного твердого тела с эллипсоидальной полостью, И Вест. Моск. ун-та Сер.1 Мат. Механ. 6, 122-125 (1972)
- [89] Карапетян, А.В.: Бифуркационные диаграммы системы трех связанных тел, Прикладная математика и механика 84(3), 273-279 (2020) DOI: 10.31857/s0032823520030030
- [90] Карапетян, А.В.: Устойчивость стационарных движений, М. Эдиториал УРСС, 168 (1998)
- [91] Карапетян, А.В., Лагутина, И.С.: Об устойчивости равномерных вращений волчка подвешенного на струне с учетом диссипативного и постоянного моментов, Изв. РАН. Механика твердого тела 1, 53-57 (2000)
- [92] Карапетян, А.В., Румянцев, В.В.: Устойчивость консервативных и диссипативных систем. Итоги науки и техники. Общая механика, М. ВИНТИ 6, 132 (1983)
- [93] Качурина, Н.М., Крементуло, В.В.: О стабилизации вращательного движения твердого тела при помощи подвижных масс, Изв. АН СССР Механика твердого тела 3, (1981)
- [94] Коваленко, Н.В., Шепеленко, О.В.: Влияние произвольной жесткости в шарнире на стабилизацию покоящегося гироскопа Лагранжа, Механика твердого тела 24, 81-84 (1992)
- [95] Коваленко, Н.В., Шепеленко, О.В.: Эффект стабилизации в системе гироскопов Лагранжа, Математика в индустрии ISIM-98 Таганрог ТГПИ, 184-186 (1998)

- [96] Коваль, В.И.: О действительности всех корней характеристического многочлена уравнений первого приближения в динамике твердого тела, *Механика твердого тела* 28, 130-145 (1999)
- [97] Кононов, Ю.М., Василенко, В.Ю.: Про стійкість обертання під дією постійного моменту дзиги лагранжа з ідеальною рідиною в середовищі що чинить опір, *Праці ІПММ НАН України* 33, 122-131 (2019)
- [98] Кононов, Ю.М., Святенко, Я.І.: On the subject of influence of dissipative and constant of moments on the stability of uniform rotations of non-free two elastically connected gyroscopes of Lagrange, *Праці ІПММ НАН України* 34, 50-61 (2020) DOI: 10.37069/1683-4720-2020-34-6
- [99] Кононов, Ю.М., Святенко, Я.І.: Вплив дисипативного і постійного моментів на стійкість рівномірного обертання двох пружно зв'язаних вільних гіроскопів Лагранжа, *Праці ІПММ НАН України* 33, 132-141 (2019) DOI: 10.37069/1683-4720-2019-33-11
- [100] Кононов, Ю.М., Святенко, Я.І.: О влиянии диссипативного и двух постоянных моментов на устойчивость равномерных вращений связанных гироскопов Лагранжа, *Вісник ДонНУ Сер.А Природничі науки* 1-2, 4-12 (2019) УДК 531.36, 531.38
- [101] Кононов, Ю.М., Чеїб, А.Х.: Про стійкість рівномірних обертань у середовищі з опором несиметричних і симетричних твердих тіл під дією постійних моментів, *Праці ІПММ НАН України* 36, 122-131 (2022)
- [102] Кононов, Ю.Н.: О влиянии перегородок в цилиндрической полости на устойчивость равномерного вращения волчка Лагранжа, *Матем. физ. и нелин. Механика* 17(51), 33-37 (1992)
- [103] Кононов, Ю.Н.: О движении системы двух твердых тел с полостями содержащими жидкость, *Механика твердого тела* 29, 76-85 (1997)
- [104] Кононов, Ю.Н. Хомяк, Т.В.: О стабилизации неустойчивого вращения твердого тела с жидкостью вращающимся твердым телом, *Вісник Донецького університету Сер.А Природничі науки* 2, 180-185 (2003)

- [105] Кононов, Ю.Н.: Об устойчивости движения системы связанных твердых тел с полостями содержащими жидкость, Механика твердого тела 36, 75-82 (2006)
- [106] Кононов, Ю.Н., Хомяк Т.В.: Об эффекте стабилизации неустойчивого вращения твердого тела с жидкостью вращающимся твердым телом, Механика твердого тела 34, 161-169 (2004)
- [107] Кононов, Ю.М., Святенко, Я.І.: Про стабілізацію обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною, Інст. механ. ім. С.П. Тимошенка НАН України Міжнародний науковий журнал Прикладна механіка 59(2), 88-99 (2023)
- [108] Кононов, Ю.Н., Киселёва, Н.В.: Влияние диссипативного и постоянного моментов на устойчивость равномерного вращения в сопротивляющейся среде волчка Лагранжа с идеальной жидкостью, Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна 850, 52-56 (2009)
- [109] Кононов, Ю.Н., Киселёва, Н.В.: Влияние дополнительных тонов колебаний жидкости на устойчивость равномерного вращения твердого тела с жидкостью, Изв. высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион 5(177), 38-42 (2013)
- [110] Кононов, Ю.Н.: О движении системы связанных твердых тел с полостями содержащими жидкость, Механика твердого тела 30, 207-216 (2000)
- [111] Кононов, Ю.Н., Киселёва, Н.В.: Об устойчивости вращения в сопротивляющейся среде волчка Лагранжа с полостью содержащей идеальную жидкость, Вісник Донецького ун-ту. Сер.А. Природничі науки 1, 48-51 (2007)
- [112] Кононов, Ю.Н.: Об устойчивости стационарного вращения волчка Лагранжа с п эллипсоидальными полостями, Матем. физ. и нелин. механика 16(50), 34-39 (1991)
- [113] Кононыхин, Г.А.: Исследование устойчивости равномерных вращений системы гироскопов Лагранжа, Механика твердого тела 10, 29-34 (1977)
- [114] Кононыхин, Г.А.: О равномерных вращениях тяжелого твердого тела подвешенного на струне, МТТ 18, 58-61 (1986)

- [115] Копачевский, Н.Д., Крейн, С.Г., Нго Зуй Кан: Операторные методы в линейной гидродинамике Эволюционные и спектральные задачи, М. Наука, 416 (1989)
- [116] Косов, А.А.: О гироскопической стабилизации неконсервативных систем, Сиб. ж. индустр. маг. 3, 80-89 (2006)
- [117] Костандян, Б.А.: Об устойчивости вращательных движений волчка с полостью наполненной жидкостью, Журн. прикл. механики и техн. физики 3, 56-64 (1960)
- [118] Кошляков, В. Н.: Метод усреднения в проблеме устойчивости движения твердого тела подвешенного на струне, Укр. мат. журн. 59(4), 467-475 (2007) DOI: 10.1007/s11253-007-0033-0
- [119] Крементуло, В.В.: О стабилизации положения равновесия твердого тела при помощи подвижных масс, Изв. АН СССР. Механика твердого тела 2, 46-50 (1980)
- [120] Крементуло, В.В.: Стабилизация стационарных движений твердого тела при помощи вращающихся масс, М. Наука, 236 (1977)
- [121] Кривцов, А.М.: Описание движения осесимметричного твердого тела в линейно-вязкой среде при помощи квазикоординат, Известия РАН Механика твердого тела 4, 23-29 (2000)
- [122] Куликов, В.П.: О малых колебаниях около тривиального вращения на струне твердого тела с полостью частично заполненной жидкостью, Изв. АН СССР МТТ 4, 33-37 (1985)
- [123] Лагутина, И.С.: О влиянии диссипативного и постоянного моментов на устойчивость стационарных движений тела на стержне, М. ВЦ РАН, 141-147 (1999)
- [124] Лагутина, И.С.: О влиянии диссипативных и постоянных сил на вид и устойчивость стационарных движений волчка Лагранжа, Вестник Московского ун-та. Сер.1 Математика Механика 3, 66-69 (2000)
- [125] Лагутина, И.С.: Устойчивость стационарных движений диссипативных механических систем автореф. дис. канд. физ.-мат. наук: 01.02.01 – теоретическая механика, И.С. Лагутина М., 11 (2000)
- [126] Лесина, М. Е.: Задача о движении системы твердых тел, ДонТГУ, 156 (1998)
- [127] Лесина, М. Е.: О стабилизации покоящегося неуравновешенного гироскопа Лагранжа, МТТ 11, 88-92 (1979)

- [128] Леутин, А.П.: Simulation of motion of related bodies, ПММ 1, 27-33 (2012)
- [129] Лещенко, Д.Д., Рачинская, А.Л.: Движение спутника относительно центра масс под действием момента сил светового давления в сопротивляющейся среде, Вісник Одеськ. нац. ун-ту 12(7), 85-98 (2007)
- [130] Лещенко, Д.Д.: О движении тяжелого твёрдого тела в сопротивляющейся среде, Прикл. Механика 11(3), 89-94 (1975)
- [131] Лимарченко, О.С., Матараццо, Дж., Ясинский В.В.: Динамика вращающихся конструкций с жидкостью. Киев: ГНОЗИС, 305 (2002)
- [132] Литвин-Седой, М.З.: Механика систем связанных твердых тел. Итоги науки и техники Общая механика, М. ВИНТИ, 3-69 (1982)
- [133] Локшин, Б.Я., Самсонов, В.А.: Задача о движении тела в сопротивляющейся среде. Качественный анализ, М. Издательство Московского университета, 237 (2012)
- [134] Лурье, А.И.: Аналитическая механика, М. Физматгиз, 824 (1961)
- [135] Малащенко, С.В.: Некоторые экспериментальные исследования относящиеся к вращению тел, Журн. прикл. механики и техн, физики 3, 205-211 (1960)
- [136] Малащенко, С.В., Темченко, М.Е.: Об одном методе экспериментального исследования устойчивости движения волчка внутри которого имеется полость наполненная жидкостью, Журн. прикл. механики и техн, физики 3, 76-80 (1960)
- [137] Малкин, И.Г.: Теория устойчивости движения, М. Наука, 623 (1966)
- [138] Маркеев, А.П.: Об устойчивости вращения волчка с полостью наполненной жидкостью, Изв. АН СССР Механика твердого тела 3, 19-26 (1985)
- [139] Меркин, Д.Р.: Введение в теорию устойчивости движения, М. Наука, 320 (1976)
- [140] Моисеев, Н.Н., Румянцев, В.В.: Динамика тела с полостями содержащими жидкость, М. Наука, 439 (1965)
- [141] Морозова, Е.П.: Об устойчивости вращения твердого тела подвешенного на струне, Прикл. математика и механика 20(5), 621-626 (1956)
- [142] Нариманов, Г.С.: О движении симметрического гироскопа полость которого частично заполнена жидкостью, Прикл. математика и механика 21(5), 698-708 (1957)

- [143] Пузырёв, В.Е., Суйков, А.С.: О движении твердого тела вокруг центра масс при частичной диссипации энергии, МТТ 39, 157-166 (2009)
- [144] Пузырёв, В.Е., Топчий, Н.В.: Оценка собственных значений линейной механической системы с двумя степенями свободы, МТТ 41, 132-140 (2011)
- [145] Пузырев, В.Е., Савченко, Н.В.: Критический случай устойчивости равномерных вращений несимметричного гироскопа, находящегося под действием демпфирующего момента, МТТ 43, 124-134 (2013)
- [146] Пузырев, В.Е., Савченко, Н.В.: Устойчивость равномерных вращений несимметричного гироскопа вокруг главной оси несущей центр масс, МТТ 42, 168 (2012)
- [147] Рвалов, Р.В., Роговой В.М.: О вращательном движении тела с полостью содержащей жидкость, Изв. АН СССР Механика твердого тела 3, 15-20 (1972)
- [148] Рубановский, В.Н.: Анализ условий устойчивости равномерного вертикального вращения динамически симметричного твердого тела подвешенного на нити, Современные вопросы математики и механики и приложения, 16-21 (1983)
- [149] Рубановский, В.Н., Румянцев, В.В.: О стационарных движениях твердого тела подвешенного на струне, Изв. АН СССР Механика твердого тела 5, 3-7 (1985)
- [150] Рубановский, В.Н.: Об устойчивости вертикального вращения твердого тела, подвешенного на стержне, МТТ 49(6), 916-922 (1985)
- [151] Румянцев, В.В.: Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. Ч.1, М. ВЦ РАН, 166 (2000)
- [152] Румянцев, В.В.: Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. Сборник статей Валентин Витальевич Румянцев и др., М. ВЦ РАН, 137 (2002)
- [153] Румянцев, В.В.: Устойчивость вращения твердого тела с эллипсоидальной полостью наполненной жидкостью, Прикл. математика и механика 21(6), 740-748 (1957)
- [154] Савченко, А.Я., Судаков, С.Н., Позднякович, Е. В.: Движение подвешенного на струне тяжелого твердого тела с вихревым заполнением, МТТ 29, 61-68 (1990)
- [155] Савченко, А.Я., Лесина, М.Е.: Необходимые условия устойчивости равномерных вращении системы двух гироскопов Лагранжа, МТТ 7, 52-59 (1974)

- [156] Савченко, А.Я., Болграбская, И.А., Кононыхин, Г.А.: Устойчивость движения систем связанных твердых тел, К. Наук. думка, 168 (1991)
- [157] Савченко, А.Я., Светличная Н.В.: Устойчивость равномерных вращений системы двух гироскопов Лагранжа с упругой связью, МТТ 13, 79-83 (1981)
- [158] Савченко, А.Я.: Устойчивость стационарных движений механических систем, К. Наук думка, 160 (1977)
- [159] Савченко, А.Я., Игнатьев, О.А.: Исследование устойчивости равномерных вращении оси волчка с жидким заполнением, Прикл. Механика 7, 52-59 (1974)
- [160] Светличная, Н.В.: Исследование устойчивости равномерных вращений систем двух гироскопов Лагранжа с упругой связью, МТТ 13, 79-83 (1981)
- [161] Светличная, Н.В.: Об эффекте стабилизации системы двух гироскопов Лагранжа с упругой связью, Матем. физика и нелин. Механика 34, 42-45 (1983)
- [162] Светличная, Н.В.: Устойчивость равномерных вращений системы двух гироскопов Лагранжа связанных упругим сферическим шарниром, МТТ 17, 77-79 (1985)
- [163] Святенко, Я.І.: Про стабілізацію нестійкого обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа за допомогою другого гіроскопа та пружних шарнірів, Механіка та математичні методи 3(2), 103-116 (2021) DOI: 10.31650/2618-0650-2021-3-2-103-116
- [164] Скимель, В.Н.: О движении гиростата подвешенного на струне, Тр. межвуз. конф. по прикл. теории устойчивости движения и аналитической механике, 118-122 (1963)
- [165] Соболев, С.Л.: О движении симметричного волчка с полостью наполненной жидкостью, Журн. прикл. механики и техн, физики 3, 20-55 (1960)
- [166] Соболев, С.Л.: О движении симметричного волчка с полостью наполненной жидкостью, Фонды матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 74 (1943)
- [167] Сосницкий, С.П.: О стабилизации равновесия консервативных систем с помощью гироскопических сил, Прикл. математика и механика 64(1), 39-69 (2000)

- [168] Стороженко, В.О., Темченко, М.Е.: Полная картина стационарных движений осесимметричного твердого тела, Аналитические методы исследования динамики и устойчивости сложных систем, 110-136 (1982)
- [169] Стороженко, В.О.: Стационарные движения в задаче определения главных осей инерции неоднородных твердых тел, К. Ин-т математики НАН Украины, 229 (2007)
- [170] Стороженко, В.О.: Дослідження дії неконсервативних позиційних сил в системах з обертанням, Доп. НАНУ. Сер. Мат. природн. техн. науки. 7, 67-70 (1998)
- [171] Стороженко, В.О.: Об устойчивости вращения тела подвешенного посредством системы последовательно соединенных стержней, Изв. АН СССР. Механика твердого тела 1, 45-52 (1985)
- [172] Судаков, С.Н.: Исследование движения систем твердых тел с полостями заполненными жидкостью, Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук спец.01.02.01 "Теоретическая механика" С.Н. Судаков М., 14 (1983)
- [173] Судаков, С.Н.: Движение систем тел с эллипсоидальными полостями заполненными жидкостью. Автореф. дис. д. физ.-мат. наук 01.02.01, ИПММ НАН Украины Донецк, 14 (2009)
- [174] Сумин, Т.С.: Исследование стационарных движений твердого тела с полостью целиком заполненной вязкой жидкостью и подвешенного на стержне, 9 Всероссийский съезд теор. и прикл. механике 22-28 августа 2006 г. тезисы докл. Н. Новгород ННГУ, 110 (2006)
- [175] Сумин, Т.С.: Об устойчивости равномерных вращений тела заполненного жидкостью и подвешенного на струне, Вестн. МГУ Сер.1 6, 56-60 (2004)
- [176] Темченко, М. Е.: Исследование устойчивости движения твердого тела на струнном подвесе при наличии демпфирования, Численно-аналитические методы исследования динамики и устойчивости сложных систем, 134-141 (1984)
- [177] Тронин, К.Г.: Численное исследование вращения твердого тела под действием суммы постоянного и диссипативного возмущающих моментов, Нелинейная динамика 2, 209-213 (2005)

- [178] Троценко В.А, Троценко Ю.В. Застосування варіаційних методів у спектральних задачах тонкостінних оболонок і гідропружності. Київ: Наукова думка, 2023.– 338 с.
- [179] Филимонихин, Г.Б., Пирогов, В.В.: Стабилизация положения оси вращения твердого тела связанными абсолютно твердыми телами, Прикл. механика 41(8), 122-129 (2005)
- [180] Харламов, П.В.: Об уравнениях движения системы твердых тел, Механика твердого тела 4, 52-73 (1972)
- [181] Харламов, П.В., Лесина, М.Е., Харламов, А.П.: Теория и эксперимент при исследовании движения тела на подвесе, НАН України Ін-т прикл. математики и механіки, 30 (1998)
- [182] Цельман, Ф.Х.: Об устойчивости вращения твердого тела с эллипсоидальной полостью наполненной жидкостью, Прикл. математика и механика 26(2), 1128-1130 (1962)
- [183] Чеботарев, Н.Г., Мейман, Н.Н.: Проблема Рауса-Гурвица для полиномов и целых функций, Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова XXVI, 331 (1949)
- [184] Черноусько, Ф.Л.: Вращательные движения твердого тела с полостью заполненной жидкостью, Прикл. математика и механика 31(3), 415-432 (1967)
- [185] Черноусько, Ф.Л.: Движение твердого тела с полостями содержащими вязкую жидкость, Математические методы в динамике космических аппаратов 7, 232 (1968)
- [186] Черноусько, Ф.Л., Акуленко, Л.Д., Лещенко, Д.Д.: Эволюция движения твердого тела относительно центра масс, Ижевский институт компьютерных исследований, 308 (2015)
- [187] Чурченков, А.А.: Динамика завихрений жидкости в полости вращающегося тела, М. Физмат, 221 (2010)
- [188] Шамолин, М.В.: Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела, М. Экзамен, 351 (2007)

Додаток А: список публікацій здобувача

Публікації у наукових виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз:

1. Kononov, Y.M., Svyatenko, Y.I.: Stabilization of unstable spinning of a Lagrange gyroscope in a resisting medium by another spinning gyroscope. *International Applied Mechanics* **58**, 605–612 (2022) DOI: 10.1007/s10778-023-01184-3

2. Kononov, Y.M., Svyatenko, Y.I.: Stabilization of a spinning Lagrange gyro-scope filled with ideal fluid in a resisting medium, *International Applied Mechanics* **59**, 207–217 (2023) DOI: 10.1007/s10778-023-01213-1

Публікації у фахових виданнях України:

3. Кононов, Ю.М., Святенко, Я.І.: О влиянии диссипативного и двух постоянных моментов на устойчивость равномерных вращений связанных гироскопов Лагранжа, *Вісник ДонНУ Сер.А Природничі науки* **1-2**, 4-12 (2019) DOI:10.31558/1817-2237.2019.1-2

4. Кононов, Ю.М., Святенко, Я.І.: Вплив дисипативного і постійного моментів на стійкість рівномірного обертання двох пружно зв'язаних вільних гіроскопів Лагранжа, *Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України* **33**, 132-141 (2019) DOI: 10.37069/1683-4720-2019-33-11

5. Kononov, Y.M., Sviatenko, Y.I.: On the subject of influence of dissipative and constant of moments on the stability of uniform rotations of non-free two elastically connected gyroscopes of Lagrange, *Proceedings of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics NAS of Ukraine* **34**, 50–61 (2020) DOI: 10.37069/1683-4720-2020-34-6

6. Святенко, Я.І.: Про стабілізацію нестійкого обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа за допомогою другого гіроскопа та пружних шарнірів, *Механіка та математичні методи* **3(2)**, 103-116 (2021) DOI: 10.31650/2618-0650-2021-3-2-103-116

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертаційної роботи:

7. Кононов Ю.Н., Святенко Я.И. О влиянии диссипативного и двух постоянных моментов на устойчивость равномерных вращений двух упруго связанных гироскопов Лагранжа. XIX Міжнародна конференція "Моделювання та дослідження стійкості динамічних систем" (DSMSI-2019). С. 94-95.

9. Кононов Ю.Н., Святенко Я.И. О влиянии диссипативного и постоянного моментов на устойчивость равномерных вращений двух упруго связанных волчков Лагранжа. VI Міжнародна конференція "Актуальні проблеми Інженерної механіки". Одеса, 2019. С. 144-147.

10. Кононов Ю.М., Святенко Я.І. Про стійкість рівномірних обертань в середовищі з опором двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа. Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2020", Львів, 2020.

<http://iapmm.lviv.ua/chyt2020/abstracts/Kononov.pdf>

11. Кононов Ю.М., Святенко Я.І. Про стабілізацію нестійкого обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа. XVI Міжнародна наукова конференція для молодих вчених “Сучасні проблеми математики та її застосування у природничих науках та інформаційних технологіях”. Харків, 2021. С.20-21.

11. Кононов Ю.М., Святенко Я.І. Про стабілізацію нестійкого обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа другим гіроскопом, який обертається. Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2021", Львів, 2021.

<http://iapmm.lviv.ua/chyt2021/abstracts/Svyatenko.pdf>

12. Кононов Ю.М., Святенко Я.І. Про стабілізацію нестійкого обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа за допомогою другого гіроскопа та пружних шарнірів. I Всеукраїнська науково-практична конференція “ Прикладні аспекти сучасних міждисциплінарних досліджень”, Вінниця, 2021. С.136-139.

13. Святенко Я., Кононов Ю. Про стабілізацію нестійкого обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною. Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2022", Львів, 2022.

<http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2022/abstracts/Sviatenko.pdf>

14. Кононов Ю.М., Святенко Я.І. Про стійкість обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа на підвісі. Міжнародна наукова конференція “Математичні проблеми технічної механіки – 2023” - Київ, Дніпро, Кам’янське 2023 – С.51-52.

15. Святенко Я.І., Кононов Ю.М. Про стійкість обертання гіроскопа Лагранжа на підвісі у середовищі з опором під дією постійного моменту. Міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми механіки та математики – 2023” -Львів. 2023 – С.73-74.

16. Кононов Ю.М., Святенко Я.І. Про стійкість обертання на підвісі гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною у середовищі з опором. Міжнародна наукова конференція “Актуальні проблеми механіки - 2023” – Київ, Дніпро, Львів, Харків 2023.