

АНОТАЦІЯ

Святенко Я.І. Про стійкість обертання у середовищі з опором системи двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа з ідеальною рідиною— Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 Прикладна математика (Галузь знань 11 Математика та статистика) – Інститут прикладної математики і механіки національної академії наук України, Черкаси, 2023.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню асимптотичної стійкості обертань у середовищі з опором невільної системи двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа та системи двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа з осесиметричними порожнинами, які повністю заповнені ідеальною нестисливою рідиною.

Наведений огляд сучасного стану досліджуваної у роботі проблеми свідчить про те, що широкі можливості практичного застосування результатів досліджень потребують аналітичного визначення основних властивостей обертання у середовищі з опором системи двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа та системи двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа з ідеальною рідиною, оскільки ця модель добре відображає властивості багатьох реальних механічних об'єктів.

Достовірність отриманих результатів підтверджується порівнянням з відомими у літературі результатами.

Виконані аналітичні дослідження показали досить високу ефективність отриманих умов стійкості.

Робота в цілому носить теоретичний характер, але наукове значення результатів та практична цінність роботи полягає в можливості їх застосування у роботі конструкторських бюро, науково-дослідних інститутів та підприємств, що займаються проектуванням і розрахунком механічних об'єктів, пов'язаних з обертанням у середовищі з опором систем твердих тіл та систем твердих тіл з рідиною в машинобудуванні, авіаційній та космічній техніці.

У вступній частині роботи представлено актуальність теми дослідження, визначено об'єкт та предмет дослідження, загально окреслено використані методи та

зв'язок роботи з науковими програмами, і темами. Сформульовано мету і перераховано задачі дослідження. Наведено наукову новизну отриманих результатів і практичне значення результатів дослідження, зокрема у розробці та конструюванні механічних об'єктів в ракетно-космічній техніці. Автором зазначено особистий внесок в спільних публікаціях - 6 статей в наукових журналах та 10 тез у працях міжнародних наукових конференцій. Перераховано наукові конференції на яких проводилася апробація результатів шляхом доповідей і обговорення досліджень.

У першому розділі наведено коротку історію вивчення питань, розглянутих в дисертації, а також відомі результати, що використовуються в дисертації. Наведений огляд сучасного стану розв'язання задач динаміки та стійкості обертання у середовищі з опором систем пружно зв'язаних твердих тіл та систем твердих тіл з рідиною свідчить про те, що ці задачі ще не вирішені й потребують подальших аналітичних та чисельних досліджень, оскільки вони мають не тільки теоретичний інтерес, а і велике практичне значення.

У другому розділі наведено постановку задачі про рух у середовищі з опором невіЛЬНОї системи двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа з нестисливою рідиною, а також на підставі рівнянь руху систем зв'язаних гіростатів П.В. Харламова виведені рівняння руху механічної системи, яка розглядається:

$$\begin{aligned} (J_1 \cdot \omega_1 + \lambda_1)' + m_2 s_1 \times (\omega_1 \times s_1 + \omega_2 \times c_2)' = \\ = (m_1 c_1 + m_2 s_1) g \times v + L_1 - L_2 + M_{1q} + M_{1p} - D_1 \omega_1, \\ (J_2 \cdot \omega_2 + \lambda_2)' + m_2 c_2 \times (\omega_1 \times s_1 + \omega_2 \times c_2)' = \\ = m_2 c_2 g \times v + L_2 + M_{2q} + M_{2p} - D_2 \omega_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут $J_i = \text{diag}(A_i, A_i, C_i)$ – тензор інерції твердого тіла S_i^0 і рідини відносно точки O_i ;

$\lambda_i = \rho_i \int_{\tau_i} \mathbf{r}_i \times \mathbf{u}_i d\tau$ – гіростатичний момент; $\mathbf{u}_i$ – вектор відносної швидкості рідини в

порожнині τ_i ; точкою позначена абсолютна похідна; $s_1 = \overrightarrow{O_1 O_2}$; $c_i = \overrightarrow{O_i C_i}$; m_i і C_i – маса і центр мас тіла S_i .

До рівнянь (1) потрібно додати рівняння руху рідини у порожнині τ_i :

$$\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + (\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \mathbf{u}_i + 2\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{u}_i + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times \mathbf{r}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_i) + \dot{\mathbf{V}}_i = -\frac{1}{\rho_i} \nabla \tilde{P}_i - \nabla U + \nu_i \Delta \mathbf{u}_i, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_i = 0 \text{ в } \tau_i, \mathbf{u}_i = 0 \text{ (} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_i = 0 \text{ при } \nu_i = 0 \text{) на } \Sigma_i.$$

Де $\tilde{P}_i$ – тиск в порожнині τ_i ; U – потенціал масових сил (масові сили вважаються потенційним); $\dot{\mathbf{V}}_i$ – прискорення точки O_i ; Σ_i – границя області τ_i .

За допомогою функції стану С.Л. Соболева для ідеальної обертової рідини виведені рівняння збуреного руху у середовищі з опором системи двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа з довільними осесиметричними порожнинами, що містять ідеальну рідину:

$$A'_1 \ddot{\gamma}_1 + (i\tilde{C}_1 + D_1) \dot{\gamma}_1 + \mu \ddot{\gamma}_2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{1n} \dot{S}'_{1n} = (\tilde{a}_1 g - k_1 - k_2) \gamma_1, \\ A'_2 \ddot{\gamma}_2 + (i\tilde{C}_2 + D_2) \dot{\gamma}_2 + \mu \ddot{\gamma}_1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \dot{S}'_{2n} = (\tilde{a}_2 g - k_2) \gamma_2, \quad (3)$$

$$N_{in}^2 (\dot{S}_{in} - i\lambda_{in} S_{in}) + a_{in} \dot{\Omega}_i = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots, \infty; i=1, 2). \quad (4)$$

Тут $\lambda_{in} = 2\omega_{0i}/\kappa_{in}$, $N_{in}^2 = \int_{\tau_i} \mathbf{v}_{in}^2 d\tau$, комплексні власні векторні функції $\mathbf{v}_{in}$ та відповідні їм власні числа κ_{in} .

А відповідне характеристичне рівняння збуреного руху (3) із урахуванням основного тону коливання ідеальної рідини викладено у вигляді поліному 6-го ступеня:

$$a_6 \lambda^6 + (a_5 + ib_5) \lambda^5 + \dots + (a_1 + ib_1) \lambda + a_0 + ib_0 = 0. \quad (5)$$

Розглянуто різні випадки рівняння (5), а саме: випадок відсутності рідини в першому твердому тілі, у другому або у двох твердих тіл, випадок відсутності постійних моментів у інерційній або неінерційній системах відліку, випадок універсального пружного шарніру та випадок відсутності дисипації і постійних моментів. Здобуте характеристичне рівняння є точним для еліпсоїдальних і софокусно еліпсоїдальних порожнин і наближеними для всіх інших осесиметричних порожнин для уточнення яких слід враховувати додаткові тони коливання ідеальної рідини.

У третьому розділі на підставі характеристичного рівняння (5) у випадку відсутності рідини у двох твердих тіл і на основі критерія Льєнара-Шіпара, записаного у інформному вигляді отримані та аналітично досліджені умови асимптотичної стійкості рівномірних обертань у середовищі з опором системи двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа. Ці умови представлені у вигляді:

$$I_1 = |\Delta_1| = a_3 > 0, \quad (6)$$

$$I_3 = |\Delta_3| = \begin{vmatrix} a_4 & -b_3 & -a_2 \\ 0 & a_3 & -b_2 \\ a_3 & -b_2 & -a_1 \end{vmatrix} > 0, \quad (7)$$

$$I_5 = |\Delta_5| = \begin{vmatrix} a_4 & -b_3 & -a_2 & b_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & -b_3 & -a_2 & b_1 \\ 0 & 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 \\ 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 & b_0 \\ a_3 & -b_2 & -a_1 & b_0 & 0 \end{vmatrix} > 0, \quad (8)$$

$$I_7 = |\Delta_7| = \begin{vmatrix} a_4 & -b_3 & -a_2 & b_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & -b_3 & -a_2 & b_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & -b_3 & -a_2 & b_1 & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 & b_0 \\ 0 & 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 & b_0 & 0 \\ 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 & b_0 & 0 & 0 \\ a_3 & -b_1 & -a_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} > 0. \quad (9)$$

І на основі цих умов розглядається можливість стабілізації нестійкого обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа за допомогою другого гіроскопа у випадку відсутності постійних моментів в інерціальній системі ($P_1 = P_2 = 0$). А саме згідно з нерівностей (7)-(9) виписуються у наближенні достатньо великих значеннях кутової швидкості ω_{02} умови стабілізації:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 > \tilde{a}_1 g, \\ k_2 > \tilde{a}_2 g. \end{cases} \quad (10)$$

Також у цьому розділі досліджуються умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа на підвісі:

$$I_{32}\omega^2 + I_{31}\omega + I_{30} > 0, \quad I_{56}\omega^6 + I_{55}\omega^5 + \dots + I_{51}\omega + I_{50} > 0,$$

$$I_{78}\omega^8 + I_{77}\omega^7 + \dots + I_{71}\omega + I_{70} > 0, \quad (11)$$

$$\tilde{I}_{31}k_1 + \tilde{I}_{30} > 0, \quad \tilde{I}_{53}k_1^3 + \tilde{I}_{52}k_1^2 + \tilde{I}_{51}k_1 + \tilde{I}_{50} > 0, \quad \tilde{I}_{75}k_1^5 + \tilde{I}_{74}k_1^4 + \dots + \tilde{I}_{71}k_1 + \tilde{I}_{70} > 0. \quad (12)$$

$$\hat{I}_{31}k_2 + \hat{I}_{30} > 0, \quad \hat{I}_{53}k_2^3 + \hat{I}_{52}k_2^2 + \hat{I}_{51}k_2 + \hat{I}_{50} > 0, \quad \hat{I}_{76}k_2^6 + \hat{I}_{75}k_2^5 + \dots + \hat{I}_{71}k_2 + \hat{I}_{70} > 0. \quad (13)$$

Для перевірки отриманих умов асимптотичної стійкості був розглянутий відомий в літературі випадок відродження підвісу у струну. У цьому випадку ми маємо дві умови стійкості. Друга умова стійкості збіглася з відомою умовою, а перша умова у статті була пропущена. Усі отримані умови асимптотичної стійкості і необхідні умови стійкості при відсутності дисипації прості та зручні для проведення чисельних досліджень.

Отримані у третьому розділі умови стійкості та стабілізації порівнюються з аналогічними умовами за відсутності дисипації.

У четвертому розділі узагальнюються основні результати третього розділу на випадок двох гіроскопів Лагранжа, які містять довільну осесиметричну порожнину з ідеальною нестисливою рідиною. З урахуванням основного тону коливання ідеальної рідини отримані у вигляді системи п'яти нерівностей умови асимптотичної стійкості рівномірних обертань. Ці умови виписані відносно кінетичних моментів першого або другого гіроскопів, відносно кутових швидкостей гіроскопів, а також відносно коефіцієнтів пружності сферичних шарнірів. Розглянуті умови стійкості при різних випадках відсутності постійних моментів в інерційній та неінерційній системах відліку, при випадках виродження сферичних шарнірів у шарнір Гука. Розглянуто можливість стабілізації нестійкого обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною за допомогою другого гіроскопа, який обертається. Отримані достатні умови на коефіцієнти пружності шарнірів і перший тон коливання рідини у довільній осесиметричній порожнині при яких завжди буде можлива стабілізація при великих значеннях кутової швидкості другого гіроскопа. До достатніх умов, які були раніше отримані у третьому розділі додається умова на перший тон коливання рідини, він має бути більше одиниці. На прикладі еліпсоїдальної порожнини показано, що вона

повинна бути стиснута вздовж осі обертання. Отримані умови стабілізації порівнюються з аналогічними умовами за відсутності дисипації. Показано, що при відсутності дисипації еліпсоїдальна порожнина може бути не тільки стиснута але й витягнута. У цьому є принципова різниця в цих двох випадках. Розглянуто задачу про стійкість рівномірних обертань на підвісі гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною в середовищі з опором. Проведено аналітичні дослідження впливу рідини, пружності шарнірів, масових та інерційних характеристик підвісу на умови стійкості. Отримані умови порівнюються з умовами стійкості за відсутності дисипації.

Ключові слова: нелінійні звичайні диференціальні рівняння руху системи двох твердих тіл, пружність, підвіс, середовище з опором, гіроскопи Лагранжа, нелінійні диференціальні рівняння руху ідеальної нестисливої рідини, довільна осесиметрична порожнина, рівномірні обертання, лінеаризація, вільні коливання, крайова задача, власні функції і власні числа, спектральна задача, лічильна система звичайних диференціальних рівнянь, еліпсоїдальна порожнина, перший метод Ляпунова, асимптотична стійкість, стабілізація.

ABSTRACT

Ya.I. Sviatenko On the stability of rotation in a resistive medium of a system of two elastically connected Lagrangian gyroscopes with an ideal fluid.

Qualifying scientific work presented as a manuscript.

Thesis for the degree of Doctor of Philosophy in specialty 113 Applied Mathematics
Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of
Ukraine, Cherkasy, 2023.

The thesis is devoted to the study of the asymptotic stability of rotations in a medium with resistance of a non-free system of two elastically coupled Lagrangian gyroscopes and a system of two elastically coupled Lagrangian gyroscopes with axisymmetric cavities that are completely filled with an ideal incompressible fluid. The given review of the current state of the problem investigated in the work shows that the broad possibilities of practical application of research results require an analytical determination of the main properties of rotation in a medium with resistance of a system of two elastically coupled Lagrangian gyroscopes and a system of two elastically coupled Lagrangian gyroscopes with an ideal fluid. because this model well represents the properties of many real mechanical objects.

The reliability of the obtained results is confirmed by comparison with the results known in the literature.

The performed analytical studies showed a fairly high efficiency of the obtained stability conditions.

The work as a whole is of a theoretical nature, but the scientific significance of the results and the practical value of the work lies in the possibility of their application in the work of design bureaus, research institutes and enterprises engaged in the design and calculation of mechanical objects related to rotation in the series applications with the resistance of systems of solid bodies and systems of solid bodies with liquids in mechanical engineering, aviation and space engineering.

The introductory part of the work presents the relevance of the research topic, defines the object and subject of the research, generally outlines the methods used and the connection of the work with scientific programs and topics. The goal is formulated and the tasks of the research are listed. The scientific novelty of the obtained results and the practical

significance of the research results, in particular in the development and construction of mechanical objects in rocket and space technology, are presented. The author has indicated a personal contribution in joint publications - 6 articles in scientific journals and 10 theses in the proceedings of international scientific conferences. The scientific conferences at which the results were evaluated through reports and discussion of research were listed.

In the first chapter provides a brief history of the study of the issues discussed in the dissertation, as well as known results used in the dissertation. The given review of the current state of solving the problems of dynamics and stability of rotation in a medium with resistance of systems of elastically connected solid bodies and systems of solid bodies with liquid shows that these problems have not yet been solved and require further analytical and numerical studies, since they have not only theoretical interest, but also great practical importance.

In the second chapter, the formulation of the problem of motion in a medium with resistance of a non-free system of two elastically coupled Lagrangian gyroscopes with an incompressible fluid is presented, and based on the equations of motion of systems of coupled gyrostats by P.V. Kharlamov, the equations of motion of the mechanical system under consideration are derived:

$$\begin{aligned}
 & (J_1 \cdot \omega_1 + \lambda_1)' + m_2 s_1 \times (\omega_1 \times s_1 + \omega_2 \times c_2)' = \\
 & = (m_1 c_1 + m_2 s_1) g \times v + L_1 - L_2 + M_{1q} + M_{1p} - D_1 \omega_1, \\
 & (J_2 \cdot \omega_2 + \lambda_2)' + m_2 c_2 \times (\omega_1 \times s_1 + \omega_2 \times c_2)' = \\
 & = m_2 c_2 g \times v + L_2 + M_{2q} + M_{2p} - D_2 \omega_2.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Here $J_i = \text{diag}(A_i, A_i, C_i)$ – tensor of inertia of a rigid body S_i^0 and fluids relative to a point O_i ; $\lambda_i = \rho_i \int_{\tau_i} r_i \times u_i d\tau$ – gyrostatic moment; u_i – vector of the relative velocity of the fluid in the cavity τ_i ; absolute derivative is indicated by a dot; $s_1 = \overrightarrow{O_1 O_2}$; $c_i = \overrightarrow{O_i C_i}$; m_i i C_i – mass and center of mass of the body S_i .

To equations (1), you need to add the equation of the fluid movement equation in the cavity τ_i :

$$\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + (\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \mathbf{u}_i + 2\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{u}_i + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times \mathbf{r}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_i) + \dot{\mathbf{V}}_i = -\frac{1}{\rho_i} \nabla \tilde{P}_i - \nabla U + \nu_i \Delta \mathbf{u}_i, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_i = 0 \text{ в } \tau_i, \mathbf{u}_i = 0 \text{ (} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_i = 0 \text{ при } \nu_i = 0 \text{) на } \Sigma_i.$$

Where $\tilde{P}_i$ – pressure in the cavity τ_i ; U – the potential of mass forces (mass forces are considered potential); $\dot{\mathbf{V}}_i$ – point acceleration O_i ; Σ_i – the border of the region τ_i .

Using S.L. Sobolev's state function for an ideal rotating fluid, the equations of disturbed motion in a medium with resistance of a system of two elastically connected Lagrangian gyroscopes with arbitrary axisymmetric cavities containing an ideal fluid are derived:

$$\begin{aligned} A'_1 \ddot{\gamma}_1 + (i\tilde{C}_1 + D_1) \dot{\gamma}_1 + \mu \ddot{\gamma}_2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{1n} \dot{S}'_{1n} &= (\tilde{a}_1 g - k_1 - k_2) \gamma_1, \\ A'_2 \ddot{\gamma}_2 + (i\tilde{C}_2 + D_2) \dot{\gamma}_2 + \mu \ddot{\gamma}_1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \dot{S}'_{2n} &= (\tilde{a}_2 g - k_2) \gamma_2, \end{aligned} \quad (3)$$

$$N_{in}^2 (\dot{S}_{in} - i\lambda_{in} S_{in}) + a_{in} \dot{\Omega}_i = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots, \infty; i=1, 2). \quad (4)$$

Here $\lambda_{in} = 2\omega_{0i}/\kappa_{in}$, $N_{in}^2 = \int_{\tau_i} \mathbf{v}_{in}^2 d\tau$, complex eigenvector functions $\mathbf{v}_{in}$ and their corresponding eigenvalues κ_{in} .

And the corresponding characteristic equation of disturbed motion (3) taking into account the fundamental tone of oscillation of an ideal fluid is written as a polynomial of the 6th degree:

$$a_6 \lambda^6 + (a_5 + ib_5) \lambda^5 + \dots + (a_1 + ib_1) \lambda + a_0 + ib_0 = 0. \quad (5)$$

Different cases of equation (5) are considered, namely: the case of the absence of liquid in the first solid body, in the second or in two solid bodies, the case of the absence of constant moments in inertial or non-inertial frames of reference, the case of a universal elastic hinge, and the case of the absence of dissipation and constant moments. The obtained characteristic equation is accurate for ellipsoidal and sofoval-ellipsoidal cavities and approximate for all other axisymmetric cavities, for the clarification of which additional tones of oscillation of an ideal liquid should be taken into account.

In the third chapter, on the basis of the characteristic equation (5) in the case of the absence of liquid in two solid bodies and on the basis of the Lenard-Schipar criterion, written

in innor form, the conditions of the asymptotic stability of uniform rotations in a medium with the resistance of a system of two elastically connected connected Lagrange gyroscopes. These conditions are presented in the form:

$$I_1 = |\Delta_1| = a_3 > 0, \quad (6)$$

$$I_3 = |\Delta_3| = \begin{vmatrix} a_4 & -b_3 & -a_2 \\ 0 & a_3 & -b_2 \\ a_3 & -b_2 & -a_1 \end{vmatrix} > 0, \quad (7)$$

$$I_5 = |\Delta_5| = \begin{vmatrix} a_4 & -b_3 & -a_2 & b_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & -b_3 & -a_2 & b_1 \\ 0 & 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 \\ 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 & b_0 \\ a_3 & -b_2 & -a_1 & b_0 & 0 \end{vmatrix} > 0, \quad (8)$$

$$I_7 = |\Delta_7| = \begin{vmatrix} a_4 & -b_3 & -a_2 & b_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & -b_3 & -a_2 & b_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & -b_3 & -a_2 & b_1 & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 & b_0 \\ 0 & 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 & b_0 & 0 \\ 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 & b_0 & 0 & 0 \\ a_3 & -b_1 & -a_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} > 0. \quad (9)$$

And on the basis of these conditions, the possibility of stabilizing unstable rotation in an environment with resistance of the Lagrangian gyroscope with the help of a second gyroscope in the absence of constant moments in the inertial system is considered ($P_1 = P_2 = 0$). Namely, according to inequalities (7)-(9), the stabilization conditions are written in the approximation for sufficiently large values of the angular velocity ω_{02} :

$$\begin{cases} k_1 + k_2 > \tilde{a}_1 g, \\ k_2 > \tilde{a}_2 g. \end{cases} \quad (10)$$

Also in this section, the conditions of asymptotic stability of uniform rotation in a medium with resistance of a Lagrangian gyroscope on a suspension are investigated:

$$I_{32}\omega^2 + I_{31}\omega + I_{30} > 0, \quad I_{56}\omega^6 + I_{55}\omega^5 + \dots + I_{51}\omega + I_{50} > 0, \\ I_{78}\omega^8 + I_{77}\omega^7 + \dots + I_{71}\omega + I_{70} > 0, \quad (11)$$

$$\tilde{I}_{31}k_1 + \tilde{I}_{30} > 0, \tilde{I}_{53}k_1^3 + \tilde{I}_{52}k_1^2 + \tilde{I}_{51}k_1 + \tilde{I}_{50} > 0, \tilde{I}_{75}k_1^5 + \tilde{I}_{74}k_1^4 + \dots + \tilde{I}_{71}k_1 + \tilde{I}_{70} > 0. \quad (12)$$

$$\hat{I}_{31}k_2 + \hat{I}_{30} > 0, \hat{I}_{53}k_2^3 + \hat{I}_{52}k_2^2 + \hat{I}_{51}k_2 + \hat{I}_{50} > 0, \hat{I}_{76}k_2^6 + \hat{I}_{75}k_2^5 + \dots + \hat{I}_{71}k_2 + \hat{I}_{70} > 0. \quad (13)$$

To verify the obtained conditions of asymptotic stability, the well-known case of the revival of a suspension in a string was considered in the literature. In this case, we have two stability conditions. The second stability condition coincided with a known condition, and the first condition was omitted in the article. All obtained conditions of asymptotic stability and necessary conditions of stability in the absence of dissipation are simple and convenient for conducting numerical studies.

The stability and stabilization conditions obtained in the third section are compared with similar conditions in the absence of dissipation.

In the fourth chapter summarizes the main results of the third section for the case of two Lagrangian gyroscopes containing an arbitrary axisymmetric cavity with an ideal incompressible fluid. Taking into account the fundamental tone of oscillations of an ideal fluid, the conditions of asymptotic stability of uniform rotations are obtained in the form of a system of five inequalities. These conditions are written relative to the kinetic moments of the first or second gyroscopes, relative to the angular velocities of the gyroscopes, as well as relative to the coefficients of elasticity of the spherical joints. The conditions of stability in various cases of the absence of constant moments in inertial and non-inertial frames of reference, in cases of degeneration of spherical joints into Hook's joints are considered. The possibility of stabilization of unstable rotation in a medium with resistance of a Lagrangian gyroscope with an ideal fluid by means of a second rotating gyroscope is considered. Sufficient conditions for the coefficients of elasticity of the hinges and the first tone of fluid oscillation in an arbitrary axisymmetric cavity are obtained, under which stabilization will always be possible at large values of the angular velocity of the second gyroscope. To the sufficient conditions, which were previously obtained in the third section, a condition for the first tone of the liquid vibration is added, it must be greater than one. Using the example of an ellipsoidal cavity, it is shown that it must be compressed along the axis of rotation. The resulting stabilization conditions are compared with similar conditions in the absence of dissipation. It is shown that in the absence of dissipation, the ellipsoidal cavity can be not only compressed but also stretched. There is a fundamental difference in these two cases.

The problem of the stability of uniform rotations on the suspension of a Lagrangian gyroscope with an ideal fluid in a medium with resistance is considered. Analytical studies of the effect of fluid, elasticity of hinges, mass and inertial characteristics of the suspension on stability conditions were carried out. The obtained conditions are compared with stability conditions in the absence of dissipation.

Key words: nonlinear ordinary differential equations of motion of a system of two rigid bodies, elasticity, suspension, medium with resistance, Lagrangian gyroscopes, nonlinear differential equations of motion of an ideal incompressible fluid, arbitrary axisymmetric cavity, uniform rotations, linearization, free oscillations, boundary value problem, eigenfunctions and eigenvalues, spectral problem, calculus system of ordinary differential equations, ellipsoidal cavity, Lyapunov's first method, asymptotic stability, stabilization.

Список публікацій здобувача

Публікації у наукових виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз:

1. Kononov, Y.M., Svyatenko, Y.I.: Stabilization of unstable spinning of a Lagrange gyroscope in a resisting medium by another spinning gyroscope. *International Applied Mechanics* **58**, 605–612 (2022) DOI: 10.1007/s10778-023-01184-3

2. Kononov, Y.M., Svyatenko, Y.I.: Stabilization of a spinning Lagrange gyro-scope filled with ideal fluid in a resisting medium, *International Applied Mechanics* **59**, 207–217 (2023) DOI: 10.1007/s10778-023-01213-1

Публікації у фахових виданнях України:

3. Кононов, Ю.М., Святенко, Я.І.: О влиянии диссипативного и двух постоянных моментов на устойчивость равномерных вращений связанных гироскопов Лагранжа, *Вісник ДонНУ Сер.А Природничі науки* **1-2**, 4-12 (2019) DOI:10.31558/1817-2237.2019.1-2

4. Кононов, Ю.М., Святенко, Я.І.: Вплив дисипативного і постійного моментів на стійкість рівномірного обертання двох пружно зв'язаних вільних гіроскопів Лагранжа, *Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України* **33**, 132-141 (2019) DOI: 10.37069/1683-4720-2019-33-11

5. Kononov, Y.M., Sviatenko, Y.I.: On the subject of influence of dissipative and constant of moments on the stability of uniform rotations of non-free two elastically connected gyroscopes of Lagrange, *Proceedings of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics NAS of Ukraine* **34**, 50–61 (2020) DOI: 10.37069/1683-4720-2020-34-6

6. Святенко, Я.І.: Про стабілізацію нестійкого обертання у середовищі з опорою гіроскопа Лагранжа за допомогою другого гіроскопа та пружних шарнірів, *Механіка та математичні методи* **3(2)**, 103-116 (2021) DOI: 10.31650/2618-0650-2021-3-2-103-116

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертаційної роботи:

7. Кононов Ю.Н., Святенко Я.И. О влиянии диссипативного и двух постоянных моментов на устойчивость равномерных вращений двух упруго связанных гироскопов Лагранжа. XIX Міжнародна конференція "Моделювання та дослідження стійкості динамічних систем" (DSMSI-2019). С. 94-95.

9. Кононов Ю.Н., Святенко Я.И. О влиянии диссипативного и постоянного моментов на устойчивость равномерных вращений двух упруго связанных волчков Лагранжа. VI Міжнародна конференція "Актуальні проблеми Інженерної механіки". Одеса, 2019. С. 144-147.

10. Кононов Ю.М., Святенко Я.І. Про стійкість рівномірних обертань в середовищі з опором двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа. Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2020", Львів, 2020.

<http://iapmm.lviv.ua/chyt2020/abstracts/Kononov.pdf>

11. Кононов Ю.М., Святенко Я.І. Про стабілізацію нестійкого обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа. XVI Міжнародна наукова конференція для молодих вчених “Сучасні проблеми математики та її застосування у природничих науках та інформаційних технологіях”. Харків, 2021. С.20-21.

11. Кононов Ю.М., Святенко Я.І. Про стабілізацію нестійкого обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа другим гіроскопом, який обертається. Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2021", Львів, 2021.

12. Кононов Ю.М., Святенко Я.І. Про стабілізацію нестійкого обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа за допомогою другого гіроскопа та пружних шарнірів. I Всеукраїнська науково-практична конференція “ Прикладні аспекти сучасних міждисциплінарних досліджень”, Вінниця, 2021. С.136-139.

13. Святенко Я., Кононов Ю. Про стабілізацію нестійкого обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною. Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2022", Львів, 2022.

<http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2022/abstracts/Sviatenko.pdf>

14. Кононов Ю.М., Святенко Я.І. Про стійкість обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа на підвісі. Міжнародна наукова конференція “Математичні проблеми технічної механіки – 2023” - Київ, Дніпро, Кам’янське 2023 – С.51-52.

15. Святенко Я.І., Кононов Ю.М. Про стійкість обертання гіроскопа Лагранжа на підвісі у середовищі з опором під дією постійного моменту. Міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми механіки та математики – 2023” -Львів. 2023 – С.73-74.

16. Кононов Ю.М., Святенко Я.І. Про стійкість обертання на підвісі гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною у середовищі з опором. Міжнародна наукова конференція “Актуальні проблеми механіки - 2023” – Київ, Дніпро, Львів, Харків 2023.