

**НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ**

«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Директор ІПММ НАН України
чл.-кор. НАН України



Ігор СКРИПНІК

Вересень 2023 р.

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

«Сучасна теорія графів»

підготовки здобувачів ступеня вищої освіти
треть (освітньо-науковий)
доктора філософії

галузь знань 11 Математика та статистика

спеціальність 113 Прикладна математика

Черкаси – 2023 р.

Робоча навчальна програма навчальної дисципліни «Сучасна теорія графів» для здобувачів наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 Прикладна математика

Розробник:

Сапунов Сергій Валерійович, старший науковий співробітник відділу теорії керуючих систем, кандидат фізико-математичних наук

Сапунов Сергій Валерійович, старший науковий співробітник відділу теорії керуючих систем, кандидат фізико-математичних наук

Робочу програму схвалено на засіданні відділу теорії керуючих систем
Протокол № 2 від 26.09.2023 року.

Завідувач відділу теорії керуючих с



Кононов Ю.М.

Схвалено Науково-методичною радою Інституту прикладної математики і механіки НАН України

Протокол № 4 від 29.09.2023 року.

Голова науково-методичної ради



Несмєлова О.В.

1. Опис навчальної дисципліни

Найменування показників	Галузь знань, напрям підготовки, освітньо-кваліфікаційний рівень	Характеристика навчальної дисципліни	
Кількість кредитів – 3	Галузь знань: 11 Математика та статистика	професійна	
Загальна кількість годин – 90	Спеціальність: 113 Прикладна математика	Рік підготовки:	
		1-й	
		Семестр	
		1-й	2-й
		Лекції	
Тижневих годин: аудиторних - 2 самостійної роботи - 0,9	Освітньо-кваліфікаційний рівень: доктор філософії	30 год	
		Практичні	
		26 год	
		Самостійна робота	
		34 год	
		Вид контролю: іспит	

1. Мета, завдання та очікувані результати навчальної дисципліни.

Метою навчальної дисципліни «Сучасна теорія графів» є формування у аспірантів ґрунтовних знань основних класів задач теорії графів, методів їх вирішення та практичних застосування цих методів. Значна увага приділяється складним графам (мережам), які складаються з великої кількості елементів і мають складну структуру зв'язків між елементами.

Завдання навчальної дисципліни: сформувати у аспірантів стійкі знання з методів дослідження різноманітних типів об'єктів та підструктур у графах, алгоритмів розв'язання задач на графах та мережах, застосувань графів до задач інтелектуального аналізу даних (graph mining).

Очікувані результати навчальної дисципліни

Загальні компетентності

ЗК1. Аналіз і синтез. Здатність до аналізу та синтезу на основі логічних аргументів та перевірених фактів; навички управління інформацією (уміння знаходити та аналізувати інформацію з різних джерел).

ЗК2. Дослідницька здатність. Компетентності ініціювати та виконувати (індивідуально або в науковій групі) наукові дослідження, що приводять до отримання нових знань; здатність застосовувати знання на практиці.

ЗК3. Гнучкість мислення. Набуття гнучкого способу мислення, який дає можливість зрозуміти й розв'язати проблеми та задачі, зберігаючи при цьому критичне відношення до усталених наукових концепцій.

ЗК4. Креативність. Потенціал креативності у генеруванні ідей та досягненні наукових цілей.

ЗК6. Комунікативні навички. Здатність ефективно спілкуватися із спеціальною та загальною аудиторіями, а також представляти складну інформацію у зручний та зрозумілий спосіб усно і письмово, використовуючи відповідну технічну лексику та методи; навички використання інформаційних і комунікаційних технологій; здатність спілкуватися рідною та другою іноземною мовою як усно, так і письмово.

ЗК7. Міжнародний кругозір. Здатність працювати в міжнародному середовищі, ставитися із повагою до національних та культурних традицій, способів роботи інших членів групи.

ЗК8. Популяризаційні навички. Вміння спілкуватися із нефаківцями; здатність провести усну презентацію та написати зрозумілу статтю за результатами проведених досліджень, а також щодо сучасних концепцій у прикладній математиці для нефаківців у цій галузі; здатність спілкуватися з експертами з інших галузей.

ЗК11. Етичні установки. Етика поведінки в наукових дослідженнях; турбота про якість результату.

ЗК12. Особисті якості. Здатність до навчання, саморозвитку та самовдосконалення протягом життя; визначеність і наполегливість щодо поставлених завдань і взятих обов'язків.

Фахові компетентності:

ФК 1. Знання історії розвитку та сучасного стану наукових досліджень за спеціальністю та обраною спеціалізацією.

ФК 2. Здатність застосовувати сучасну методологію, загальні та спеціальні методи наукового дослідження за спеціальністю та обраною спеціалізацією.

ФК 3. Уміння формулювати загальну методологічну базу власного наукового дослідження, усвідомлювати його актуальність, мету і значення для розвитку інших галузей науки.

ФК 5. Уміння будувати адекватні математичні моделі, досліджувати побудовані моделі та визначати можливості їх застосування.

ФК 8. Здатність здійснювати дослідження прикладних математичних задач з використанням спеціальних математичних пакетів та аналізувати отримані дані.

ФК 17. Поглиблене знання фундаментальних положень сучасної теорії графів, здатність будувати, досліджувати і аналізувати математичні моделі процесів і явищ з використанням методів теорії графів.

ФК 18. Здатність ефективно аналізувати великі набори різнорідних даних із використанням методів машинного навчання, статистики, штучного інтелекту тощо.

ФК 19. Знання сучасних технологій створення та захисту програмних продуктів, компетентність у алгоритмізації обчислювальних процесів та методів, знання та уміння використовувати сучасні мови програмування.

Програмні результати навчання:

РН 1. Знати та розуміти традиційні та передові тенденції в галузі прикладної математики, етапи історичного розвитку математичних знань і парадигм, формування поглибленої системи наукових знань за напрямом досліджень.

РН 3. Знати основні принципи, форми та методи проведення наукових досліджень в галузі прикладної математики, володіти математичним апаратом в об'ємі, достатньому для професійної діяльності.

РН 4. Вміти будувати та досліджувати математичні моделі фізичних, соціально-економічних, технічних, біологічних тощо процесів, систем, процесів, формалізувати проблеми, описані природною мовою, за допомогою математичних методів, застосовувати загальні підходи до математичного моделювання конкретних процесів.

РН 5. Мати навички використання загальних офісних та спеціалізованих програмних засобів за напрямом професійної діяльності, вміти користуватися спеціалізованими інтернет-ресурсами.

РН 9. Вміти організувати неперервний власний саморозвиток і самовдосконалення, набуття гнучкого способу мислення при творчому дослідженні, в тому числі прикладних математичних проблем.

РН 15. Уміти здійснювати збір, опрацювання, аналіз, систематизацію, захист спеціалізованої науково-технічної інформації з різних джерел, уникаючи при цьому академічної недоброчесності, робити візуалізацію аналізу інформації.

РН 16. Вміти застосовувати сучасні технології алгоритмізації обчислювальних процесів, методів програмування, програмної реалізації чисельних і символьних алгоритмів.

РН 17. Знати основні чисельні методи та алгоритми розв'язання задач прикладної та обчислювальної математики.

РН 18. Знати та вміти досліджувати основні математичні моделі, що використовуються для описання та дослідження дискретних систем різних типів, реалізовувати алгоритми моделювання для дослідження характеристик і поведінки складних об'єктів і систем, проводити експерименти.

За результатами вивчення навчальної дисципліни здобувач доктора філософії повинен:

знати:

- основні типи об'єктів та структур, що вивчаються теорією графів;
- властивості графів та пов'язаних з ними об'єктів;
- типові методи, які використовуються при роботі з графами, орграфами, мультиграфами та мережами;
- механізми оцінювання якісних параметрів дискретних моделей і конфігурацій, способів описання, побудови та дослідження математичних моделей на графах;
- основні теоретичні та методологічні напрямки мережевого аналізу;

вміти:

- формулювати прикладні та теоретичні задачі на мові графів та мереж, здійснювати підбір ефективних алгоритмів для їх розв'язання;
- розробляти програмну реалізацію вибраного алгоритму, проводити налаштування програми та інтерпретувати результати її роботи;
- застосовувати отримані теоретичні знання для доведення властивостей графів та пов'язаних з ними об'єктів;
- формалізувати соціально-економічну проблему та запропонувати адекватні мережеві методи для її аналізу.

2. Програма навчальної дисципліни

Тема 1. Базові поняття теорії графів. Приклади графів. Граф та його зображення. Орієнтовані графи. Мультиграфи. Граф Інтернету. Псевдографи. Означення графу. Маршрути у графах. Зв'язність, підграфи. Ступінь вершини. Дерева, еквівалентні означення дерева. Шлях у графі. Перенумерація циклу. Послідовність ступенів. Замкнений маршрут.

Тема 2. Планарні графи. Планарність. Гіпотеза про чотири фарби. Приклади непланарних графів. Критерій Куратовського. Плaskі графи, грані та теорема Жордана. Формула Ейлера. Хроматичне число планарних графів. Кількість перетинів у повному графі. Характеризація дводольних графів. Дводольні планарні графи.

Тема 3. Алгоритми на графах. Пошук по графу в ширину та глибину. Дерево пошуку. Пошук блоків у зв'язному графі. Знаходження мінімального остову: алгоритми Прима та Краскала. Найкоротші шляхи у зважених орграфах. Алгоритми Дійкстри та Флойда-Уоршелла.

Тема 4. Формула Келі. Уніциклічні графи. Ейлерові цикли. Кількість дерев. Кодування дерев. Побудова кодів Прюфера. Взаємно однозначна відповідність кодів та дерев. Декодування. Формула для кількості уніциклічних графів. Ейлерові цикли. Критерій ейлеровості. Центр дерева. Дерева з заданою послідовністю ступенів. Кількість неізоморфних дерев. Орієнтація графу.

Тема 5. Гамільтонові цикли. Гамільтонові цикли, теорема Дірака. Множини сусідів кінців максимального шляху. Незалежні множини. Вершинна зв'язність. Критерій Хватала. Кількість гамільтонових циклів у повному дводольному графі. Число незалежності, зв'язність. Гамільтонові цикли, що не перетинаються. Зв'язок з теорією кодування.

Тема 6. Паросполучення. Теореми Холла и Кеніга. Задача про свадьби. Паросполучення. Необхідна умова існування паросполучення. Теорема Холла. Вершинне покриття, теорема Кеніга. Паросполучення та ступені вершин. Паросполучення в деревах. К-регулярний дводольний граф.

Тема 7. Мережі та потоки у мережах. Задача про максимальний потік. Залишкові мережі, доповнюючі шляхи та розрізи. Теорема та узагальнений алгоритм Форда-Фалкерсона. Аналіз роботи алгоритму у випадку цілих та раціональних пропускних здатностей. Випадок ірраціональних пропускних здатностей. Приклад Форда та Фалкерсона. Метод найкоротших шляхів.

Тема 8. Екстремальна теорія графів. Теорема Турана. Число незалежності, клікове число. Теорема Турана. Приклад графу, на якому досяжна оцінка Турана. Задача про графи на площині. Дводольний підграф. Вершинне

покриття для графу без трикутників. Граф без парних циклів. Хроматичне число та число незалежності. Хроматичне число та максимальний ступінь. Хроматичне число графа та його доповнення.

Тема 9. Теорія Рамсея. Теорема про знайомства серед шістьох людей. Формулювання у термінах незалежних множин та розфарбувань. Числа Рамсея. Верхня оцінка числа Рамсея за допомоги рекурсії. Нижня оцінка числа Рамсея. Число Рамсея для зірки. Число Рамсея для дерева та повного графа. Розфарбування площини. Монотонні послідовності.

Тема 10. Візуалізація графів. Теорема Татта про «пружинне» укладання. Алгоритм перевірки планарності «left-right planarity test». Візуалізація дерев. Нижні оцінки.

Тема 11. Комплексні мережі. Вступ до теорії комплексних систем. Основні поняття в теорії мереж. Властивості і метрики аналізу мереж. Дескриптивний аналіз мереж. Розподіл ступенів вузлів. Безмасштабні мережі. Локальні та глобальні коефіцієнти кластеризації.

Тема 11. Математичні моделі мереж. Модель випадкового графу Ердоша-Рені. Розподіл Бернуллі. Фазовий перехід, виникнення зв'язної компоненти.

Тема 12. Маленький світ та динамічні моделі зростання. Модель Барабаши-Альберт. Переважне приєднання. Модель маленького світу. Модель Ватца-Строгаца. Перехід від регулярного графа до випадкового. Метрики центральності вузлів і аналіз зв'язків.

Тема 13. Поняття центральності та престижу. Модельні графи. Центральність мережі. Алгоритм PageRank. Стохастичні матриці. Теорема Перрона-Фробеніуса. Ступеневі ітерації. Алгоритм HITS. Порівняння ранжувань. Відстань Kendall-Tau.

Тема 14. Структурна еквівалентність. Метрики структурної еквівалентності вузлів. Евклідова відстань. Відстань Геммінга. Кореляційний коефіцієнт. Подібність за косинусом. Асортативне змішування. Модулярність. Асортативний коефіцієнт. Змішування за ступенями вузлів.

Тема 15. Мережеві спільноти. Поняття мережевих спільнот. Щільність зв'язків. Метрики. Розподіл графу на частини. Розрізи в графі. Мінімальний розріз, нормований розріз. Агломеративні та розподільні алгоритми. Кореляційна матриця. Кластеризація. Поняття проміжності ребер. Алгоритми Ньюмана-Гірвіна. Спектральні методи. Оптимізація модулярності. Класифікація алгоритмів знаходження спільнот.

Тема 16. Алгоритми розбиття графів. Наближені алгоритми. Задача знаходження мінімального розрізу в графі. Алгоритм Randomized min-cut. Багаторівневий підхід. Знаходження спільнот багаторівневим методом. Локальна кластеризація.

Тема 17. Мережеві структури. Поняття к-ядра графу, діади та тріади у графах, мотиви. Спеціальні типи мереж. Дводольні графи і мережі афілійованості. Мережі з додатними та від'ємними зв'язками.

Тема 18. Дифузія у мережах. Процес фізичної дифузії. Рівняння дифузії. Дифузія на мережах. Дискретний оператор Лапласа, матриця Лапласа, розв'язання рівняння дифузії на графі. Випадкові блукання на графі. Розповсюдження епідемій у мережах. Моделі SI, SIR, SIS на мережах. Моделювання розповсюдження.

Тема 19. Порогові моделі впливу. Розповсюдження впливу. Порогові моделі прийняття рішень. Модель Грановетера. Визначення найбільш впливових вузлів. Розповсюдження ідей. Каскади в мережах. Базова модель каскаду. Розміри каскадів. Досягнення консенсусу. Навчання у мережі. Модель Де Грута. Умови досяжності консенсусу. Соціальний вплив.

Тема 20. Стратегічні моделі формування мереж. Функція корисності. Ефективність та стабільність. Модель зв'язків. Модель співавторів. Моделі просторової сегрегації. Модель Шиллінга. Моделювання за допомоги агентів.

3. Структура навчальної дисципліни

Назва теми	Кількість годин			
	Усього	у тому числі		
		Лекції	Практичні заняття	Самостійна робота
1	2	3	4	5
Тема 1. Базові поняття теорії графів.	5	2	1	2
Тема 2. Планарні графи.	6	2	2	2
Тема 3. Алгоритми на графах.	6	2	2	2
Тема 4. Формула Келі.	6	2	2	2
Тема 5. Гамільтонові цикли.	6	2	2	2
Тема 6. Паросполучення.	6	2	2	2
Тема 7. Мережі та потоки у мережах.	6	2	2	2
Тема 8. Екстремальна теорія графів.	5	2	1	2
Тема 9. Теорія Рамсея.	5	2	1	2
Тема 10. Візуалізація графів.	5	2	1	2
Тема 11. Математичні моделі мереж.	4	1	1	2
Тема 12. Маленький світ та динамічні моделі зростання.	4	1	1	2
Тема 13. Поняття центральності та престижу.	4	1	1	2
Тема 14. Структурна еквівалентність.	4	1	1	2
Тема 15. Мережеві спільноти.	3	1	1	1
Тема 16. Алгоритми розбиття графів.	3	1	1	1
Тема 17. Мережеві структури.	3	1	1	1
Тема 18. Дифузія у мережах.	3	1	1	1
Тема 19. Порогові моделі впливу.	3	1	1	1
Тема 20. Стратегічні моделі формування мереж.	3	1	1	1
Усього годин	90	30	26	34

4. Теми практичних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Базові поняття теорії графів.	2
2	Планарні графи.	2
3	Алгоритми на графах.	2
4	Ейлерові та Гамільтонові цикли.	2
5	Паросполучення.	2
6	Мережі та потоки у мережах.	2
7	Екстремальна теорія графів.	2
8	Теорія Рамсея.	1
9	Візуалізація графів.	2
10	Основні поняття в теорії мереж.	1
11	Математичні моделі мереж.	1
12	Маленький світ та динамічні моделі зростання.	1
13	Центральність мережі.	1
14	Структурна еквівалентність.	1
15	Мережеві спільноти.	1
16	Алгоритми розбиття графів.	1
17	Мережеві структури.	1
18	Дифузія у мережах.	1
	Разом	26

5. Теми для самостійної роботи

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Матрична теорема Кірхгофа про дерева. Пошук мінімального (максимального) остовного ліса в графі.	3
2	Простір парних підграфів та множина фундаментальних циклів.	3
3	Безконтурні графи, топологічне сортування.	3
4	Задачі розфарбування вершин та ребер графа.	3
5	Застосування графів для задач програмування.	3
6	Представлення та відновлення графів.	3
7	Деревинна класифікація розмічених графів.	3
8	Конструктивна теорія графів та її застосування.	3
9	Теорія нечітких графів та її застосування.	3
10	Розфарбування з дефектом та його застосування.	3
11	Моделювання взаємодії в комплексних мережах	2
12	Аналіз флуктуацій в складних мережах	2
	Разом	34

6. Методи навчання

При викладанні навчальної дисципліни «Сучасна теорія графів» використовуються такі методи навчання: проблемно-пошуковий, пояснювально-ілюстративний, індуктивний і дедуктивний.

8. Методи контролю

Використовуються наступні методи контролю:

1. Поточний контроль знань:

- усне опитування;
- виконання практичних робіт;
- тестування;
- виконання дослідницьких завдань.

2. Підсумковий контроль знань (іспит):

- підсумковий тест або екзаменаційні білети.

9. Критерії оцінювання результатів навчання

Розподіл балів, які отримує аспірант

Аудиторна робота																				Самостійна робота	Підсумковий контроль (іспит)	Загальна кількість
теми																						
T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10	T11	T12	T13	T14	T15	T16	T17	T18	T19	T20			
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	10	30	100

Шкала оцінювання

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка за національною шкалою
	для іспиту
90-100	«відмінно» - здобувач повно і всебічно розкриває питання теми, вільно оперує поняттями і термінологією, демонструє глибокі знання джерел, має власну точку зору стосовно відповідної теми і може аргументовано її доводити
75-89	«добре» - загалом рівень знань здобувачів відповідає викладеному вище, але мають місце деякі упущення при виконанні завдань, обґрунтування неточні, не підтверджуються достатньо обґрунтованими доказами
60-74	«задовільно» - здобувач розкрив питання, в загальних рисах, розуміє їх суть, намагається робити висновки, але при цьому припускається грубих помилок, матеріал викладає нелогічно і не самостійно
35-59	«незадовільно» - з можливістю повторного складання, здобувач не в змозі дати відповідь на поставлене запитання або відповідь неправильна, не розуміє суті питання, не може зробити висновки
0-34	«незадовільно» - з обов'язковим повторним вивченням дисципліни

10. Орієнтовний перелік питань до підсумкового контролю (іспиту)

1. Основні означення, пов'язані з графами, оргграфами та мультіграфами.
2. Способи завдання графів.
3. Матриці суміжності та інцидентності, їх властивості.
4. Розфарбування планарних графів та карт.
5. Теорема про чотири фарби.
6. Доведення теореми про п'ять фарб.
7. Достатні умови Грецша та Грюнбаума 3-розфарбованості плоских графів.
8. Критерій дводольності графа.
9. Хроматичні поліноми, їх властивості.
10. Нерозв'язані задачі, які пов'язані з хроматичними поліномами.
11. Ліси та дерева.
12. Еквівалентні означення дерева.
13. Кореневі та остовні дерева.
14. Алгоритми Пріма та Краскала знаходження мінімального остова.
15. Розфарбування ребер графів и мультіграфів.
16. Теореми Візінга та Шеннона.
17. Хроматичний індекс дводольного графа.
18. Інтервальні розфарбування. Зв'язок з задачами теорії розкладів.
19. Бінарні дерева. Зберігання та пошук інформації у бінарних деревах.
20. Дерева, що збалансовані за висотою (AVL-дерева) та за вагою.

21. Порогові моделі впливу.
22. Пошук по графу в ширину та глибину. Властивості дерева пошуку.
23. Зв'язок пошуку в ширину з найкоротшими ланцюгами графа.
24. Перелічення та кодування графів.
25. Проблема ізоморфізму.
26. Кодування дерев. Код Прюфера.
27. Теорема Келі про кількість позначених дерев.
28. Точки зчленування, мости та блоки графа.
29. Вершинна та реберна k -зв'язність.
30. Характеризація двозв'язних графів.
31. Взаємне розташування двох блоків у графі. Дерево блоків та точок зчленування. Алгоритм пошуку блоків.
32. Теорема Татта про «пружинне» укладання.
33. Алгоритм перевірки планарності «left-right planarity test».
34. Візуалізація дерев. Нижні оцінки.
35. Найкоротші шляхи у зважених орграфах. Алгоритми Дійкстри та Флойда-Уоршелла.
36. Основні поняття в теорії комплексних мереж.
37. Властивості і метрики аналізу мереж.
38. Дескриптивний аналіз мереж.
39. Мережі та потоки у мережах. Задача про максимальний потік.
40. Залишкові мережі, доповнюючі шляхи та розрізи.
41. Теорема та узагальнений алгоритм Форда-Фалкерсона. Аналіз роботи алгоритму у випадку цілих та раціональних пропускних здібностей.
42. Метод найкоротших шляхів.
43. Модель випадкового графу Ердоша-Рені. Розподіл Бернуллі. Фазовий перехід, виникнення зв'язної компоненти.
44. Набори безперетинних ланцюгів, що поєднують дві підмножини вершин графа (орграфа).
45. Вершинна та реберна теореми Менгера.
46. Критерії вершинної та реберної k -зв'язності графів (теорема Уїтні).
47. Маленький світ та динамічні моделі зростання.
48. Обходи графів.
49. Ейлерові та гамільтонові графи.
50. Теорема Ейлера та алгоритм Флері.
51. Достатня умова гамільтоновості. Теореми Дірака та Оре.
52. Гамільтонові цикли та задача комівояжера.
53. Модельні графи. Поняття центральності та престижу.
54. Незалежні множини вершин та ребер графа.
55. Вершинні та реберні покриття, фактори та паросполучення.
56. Числові параметри, пов'язані з незалежністю та покриттями, їх властивості.
57. Теорема Галлаї.
58. Структурна еквівалентність.
59. Метрики структурної еквівалентності вузлів.

60. Найбільші паросполучення та ланцюги, що чергуються.
61. Характеризація найбільших паросполучень у термінах ланцюгів.
62. Паросполучення, які покривають долю дводольного графа.
63. Число незалежності, клікове число.
64. Теорема Турана. Приклад графу, на якому досяжна оцінка Турана.
65. Теореми Кеніга про число реберної незалежності дводольного графа
66. Алгоритм знаходження найбільшого паросполучення та найменшого вершинного покриття у дводольному графі.
67. Задача про призначення.
68. Поняття мережових спільнот.
69. Класифікація алгоритмів знаходження спільнот.
70. Пласкі та планарні графи.
71. Нормальні карти та Ейлерові многогранники.
72. Формула Ейлера та її наслідки.
73. Критерій планарності Понтрягіна-Куратовського.
74. Алгоритм укладання графа на площині.
75. Поняття геометрично двоїстого графа.
76. Алгоритми розбиття графів.
77. Розфарбування вершин графів.
78. Найпростіші оцінки хроматичного числа.
79. Теорема Брукса.
80. Дифузія на мережах.
81. Розповсюдження епідемій у мережах.
82. Моделювання розповсюдження.

12. Рекомендована література

Основна література дисципліни

1. Bollobas B. Modern Graph Theory. – Springer, 1998. – 394 p.
2. Diestel R. Graph Theory (4th ed.) – Springer, 2010. – 375 p.
3. Aggarwal C. C., Wang H. Managing and Mining Graph Data. – Springer, 2010. – 610 p.
4. Cook D. J., Lawrence B. H. (ed.) Mining Graph Data. – Wiley, 2007. – 479 p.
5. Зыков А. А. Основы теории графов. – М: Вузовская книга, 2004. – 664 с.
6. Касьянов В. Н., Евстигнеев В. А. Графы в программировании: обработка, визуализация и применение. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – 1104 с.

Допоміжна література дисципліни

1. Колчин В. Ф. Случайные графы. М: Физматлит, 2004. – 256 с.

2. Алескеров Ф.Т., Хабина Э.Л., Шварц Д.А., Бинарные отношения, графы и коллективные решения. М.: Изд. дом ГУ-ВШЭ, 2006. – 300 с.

3. Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства. М.: Физматлит, 2010. – 228 с.