

**НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ**

«ЗАТВЕРДЖУЮ»



Директор ІАММ НАН України
Чл.-кор. НАН України

І.І. Скрипнік

І.І. Скрипнік 2022 р.

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Математичні методи дослідження складних механічних систем

**підготовки здобувачів ступеня вищої освіти
треть (освітньо-науковий)
доктора філософії**

галузь знань 11 Математика та статистика

спеціальність 113 Прикладна математика

Черкаси – 2022 р.

Робоча навчальна програма навчальної дисципліни «Математичні методи дослідження складних механічних систем» для здобувачів наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 «Прикладна математика»

Розробник:

Кононов Юрій Микитович, завідувач відділом теорії керуючих систем,
доктор фізико-математичних наук, професор ПІММ НАН України

Робочу програму схвалено на засіданні відділу теорії керуючих систем
Протокол № 2 від 26.09.2022 року.

Завідувач відділу теорії керуючих с



Кононов Ю.М.

Схвалено Науково-методичною радою Інституту прикладної математики і
механіки НАН України

Протокол № 4 від 30.09.2022 року.

Голова науково-методичної ради



Несмєлова О.В.

1. Опис навчальної дисципліни

Найменування показників	Галузь знань, напрям підготовки, освітньо-кваліфікаційний рівень	Характеристика навчальної дисципліни
Найменування показників	Галузь знань, напрям підготовки, освітньо-кваліфікаційний рівень	Характеристика навчальної дисципліни
Кількість кредитів - 4	Галузь знань: 11 Математика та статистика	Вибіркова
Загальна кількість годин –120	Спеціальність: 113 Прикладна математика	Рік підготовки:
		1-2
		Семестр
		2-3
Тижневих годин: аудиторних – 1,5 самостійної роботи – 1,7	Освітньо-кваліфікаційний рівень: доктор філософії	Лекції
		28 год.
		Практичні
		28 год.
		Самостійна робота
		64 год.
		Вид контролю: іспит

2. Мета, завдання та очікувані результати навчальної дисципліни.

Метою вивчення навчальної дисципліни «Математичні методи дослідження складних механічних систем» є поглиблене знайомство з сучасними математичними методами дослідження динаміки і стійкості руху складних механічних систем, поглиблене знайомство з колом задач руху твердого та пружного тіла з рідиною, теоретичної гідромеханіки, теорії пружності, гідропружності та теорії стійкості руху. Для вивчення цього курсу аспіранти повинні володіти основними поняттями та фактами, що викладаються в курсах теоретичної механіки, теоретичної гідромеханіки, математичної фізики, загальних курсів математичного аналізу, вищої алгебри та диференціальних рівнянь.

Вивчення даної дисципліни значною мірою сприяє формуванню у аспірантів наукового світогляду.

Завдання навчальної дисципліни:

- сучасні математичні методи дослідження динаміки та стійкості руху складних механічних систем;
- основні фізичні і математичні моделі для побудови і дослідження сучасних задач динаміки та стійкості руху складних механічних систем;
- методи зведення гібридних рівнянь руху складних механічних систем (звичайних диференціальних рівняння руху твердого тіла та диференціальних рівняння в частинних похідних теорії пружності і рідини) в лічильну систему звичайних диференціальних рівнянь;
- математичний опис складних механічних систем (Принцип Гамільтона-Остроградського. Узагальнене хвильове рівняння. Операторна запис рівнянь руху. Спектральна теорія самоспряжених лінійних операторів в гільбертовому просторі);
- стійкість сталих рухів складних систем (Стійкість по відношенню до частини змінних. Теореми про стійкість і нестійкість. Завдання мінімуму для твердого тіла з порожниною, що містить рідину. Правило "великої вісі");
- сучасні передові концептуальні та методологічні знання при розв'язання задач динаміки та стійкості руху складних механічних систем.

Очікувані результати навчальної дисципліни

Загальні компетентності:

1. **ЗК1.** Аналіз і синтез. Здатність до аналізу та синтезу на основі логічних аргументів та перевірених фактів; навички управління інформацією (уміння знаходити та аналізувати інформацію з різних джерел).
2. **ЗК2.** Дослідницька здатність. Компетентності ініціювати та виконувати (індивідуально або в науковій групі) наукові дослідження, що приводять до отримання нових знань; здатність застосовувати знання на практиці.
3. **ЗК3.** Гнучкість мислення. Набуття гнучкого способу мислення, який дає можливість зрозуміти й розв'язати проблеми та задачі, зберігаючи при цьому критичне відношення до усталених наукових концепцій.
4. **ЗК8.** Популяризаційні навички. Вміння спілкуватися із нефахівцями; здатність провести усну презентацію та написати зрозумілу статтю за результатами проведених досліджень, а також щодо сучасних концепцій у прикладній математиці для нефахівців у цій галузі; здатність спілкуватися з експертами з інших галузей.

Фахові компетентності:

1. **ФК2.** Здатність застосовувати сучасну методологію, загальні та спеціальні методи наукового дослідження за спеціальністю та обраною спеціалізацією.
2. **ФК5.** Уміння будувати адекватні математичні моделі, досліджувати побудовані моделі та визначати можливості їх застосування.
3. **ФК8.** Здатність здійснювати дослідження прикладних математичних задач з використанням спеціальних математичних пакетів та аналізувати отримані дані.
4. **ФК12.** Поглиблені знання з теорії оптимального керування, якісної теорії лінійних керованих систем та основ геометричної теорії нелінійних систем. Здатність застосовувати методи теорії керування для розв'язання задач оптимізації та синтезу законів керування для математичних моделей динамічних процесів у природничих та технічних науках.

Програмні результати навчання:

1. **РН4.** Вміти будувати та досліджувати математичні моделі фізичних, соціально-економічних, технічних, біологічних тощо процесів, систем, процесів, формалізувати проблеми, описані природною мовою, за допомогою математичних методів, застосовувати загальні підходи до математичного моделювання конкретних процесів.
2. **РН6.** Вміти пояснювати складні математичні концепції мовою, зрозумілою для нефахівців у галузі математики, представляти

результати наукових досліджень на наукових та популяризаційних заходах.

3. **РН9.** Вміти організувати неперервний власний саморозвиток і самовдосконалення, набуття гнучкого способу мислення при творчому дослідженні, в тому числі прикладних математичних проблем.

4. **РН11.** Мати ґрунтовні знання з математичної теорії керування, вміти застосовувати їх для розв'язання прикладних задач.

За результатами вивчення навчальної дисципліни здобувач доктора філософії повинен:

знати:

- основні поняття і рівняння руху твердого та пружного тіла з рідиною, методи зведення гібридних рівнянь руху складних механічних систем (звичайних диференціальних рівнянь руху твердого тіла та диференціальних рівнянь в частинних похідних теорії пружності і рідини) в лічильну систему звичайних диференціальних рівнянь;
- математичний опис складних механічних систем (Принцип Гамільтона-Остроградського. Узагальнене хвильове рівняння. Операторна запис рівнянь руху. Спектральна теорія самоспряжених лінійних операторів в гільбертовому просторі) ;
- метод Релея-Рітца-Гальоркіна (метод передбачуваних форм коливань) ;
- загальні властивості власних частот і власних форм розподілених систем (Рівняння вільних коливань в операторній формі. Енергетичні добутки. Ортогональність власних форм. Збіжність по енергетичній нормі) ;
- метод скінченних елементів. Зв'язок МСЕ з методом Рітца;
- стійкість сталих рухів складних систем (Стійкість по відношенню до частини змінних. Теореми про стійкість і нестійкості. Задача мінімуму для твердого тіла з порожниною, що містить рідину. Правило "великої вісі");
- варіаційні принципи в теорії власних коливань розподілених систем (Формула Релея. Основний варіаційний принцип. Варіаційний принцип Релея і Куранта) ;
- структура спектра власних частот (Дискретний, суцільний і змішаний спектри. Визначення власних частот. Точні методи. Метод малого параметра (метод збурень). Метод послідовних наближень. Метод теорії лінійних інтегральних рівнянь. Асимптотичні методи).
- визначення власних частот і власних форм розподілених систем (Метод Релея і родинні методи. Метод Рітца. Метод Стодоли. Метод Бубнова-Гальоркіна. Зв'язок між методами Бубнова-Гальоркіна і Рітца. Застосування методу Бубнова-Гальоркіна до інтегральних рівнянь. Метод Граммель).

уміти :

- записати рівняння руху твердого та пружного тіла з рідиною, використовувати методи зведення гібридних рівнянь руху складних механічних систем (звичайних диференціальних рівнянь руху твердого тіла та диференціальних рівнянь в частинних похідних теорії пружності і рідини) в лічильну систему звичайних диференціальних рівнянь;
- зробити математичний опис складних механічних систем (Принцип Гамільтона-Остроградського. Узагальнене хвильове рівняння. Операторна запис рівнянь руху. Спектральна теорія самоспряжених лінійних операторів в гільбертовому просторі);
- використовувати метод Релея-Рітца-Гальоркіна (метод передбачуваних форм коливань);
- сформулювати загальні властивості власних частот і власних форм розподілених систем (Рівняння вільних коливань в операторній формі. Енергетичні добутки. Ортогональність власних форм. Збіжність по енергетичній нормі);
- застосовувати метод скінченних елементів. Зв'язок МСЕ з методом Рітца;
- визначати стійкість сталих рухів складних систем (Стійкість по відношенню до частини змінних. Теореми про стійкість і нестійкості. Завдання мінімуму для твердого тіла з порожниною, що містить рідину. Правило "великої вісі");
- користуватися варіаційними принципами в теорії власних коливань розподілених систем (Формула Релея. Основний варіаційний принцип. Варіаційний принцип Релея і Куранта);
- визначати структуру спектру власних частот (Дискретний, суцільний і змішаний спектри. Визначення власних частот. Точні методи. Метод малого параметра (метод збурень). Метод послідовних наближень. Метод теорії лінійних інтегральних рівнянь. Асимптотичні методи);
- визначати власні частоти і власні форми розподілених систем (Метод Релея і родинні методи. Метод Рітца. Метод Стодоли. Метод Бубнова-Гальоркіна. Зв'язок між методами Бубнова-Гальоркіна і Рітца. Застосування методу Бубнова-Гальоркіна до інтегральних рівнянь. Метод Граммель).

3. Програма навчальної дисципліни

1. Складні механічні системи. Рівняння складних механічних систем на прикладі руху твердого тіла з рідиною і твердого тіла з пружними відсіками з рідиною.

2. Методи зведення гібридних рівнянь руху СМС (звичайних диференціальних рівнянь руху твердого тіла та диференціальних рівнянь в

частинних похідних пружності і рідини) в лічильну систему звичайних диференціальних рівнянь.

3. Математичний опис складних механічних систем (Принцип Гамільтона-Остроградського. Узагальнене хвильове рівняння. Операторна запис рівнянь руху. Спектральна теорія самоспряжених лінійних операторів в гільбертовому просторі).

4. Метод Релея-Рітца-Гальоркіна (метод передбачуваних форм коливань).

5. Загальні властивості власних частот і власних форм розподілених систем (Рівняння вільних коливань в операторній формі. Енергетичні добутки. Ортогональність власних форм. Збіжність по енергетичній нормі).

6. Модальний аналіз (Розкладання за власними формами коливань. Властивості частот і форм коливань).

7. Метод скінченних елементів. Зв'язок МСЕ з методом Рітца.

8. Стійкість сталих рухів складних систем (Стійкість по відношенню до частини змінних. Теореми про стійкість і нестійкості. Завдання мінімуму для твердого тіла з порожниною, що містить рідину. Правило "великої вісі").

9. Загальні рівняння руху пружного тіла з рідиною (Динамічні величини пружного тіла з рідиною, сили і моменти. Рівняння руху деформованої системи).

10. Варіаційні принципи в теорії власних коливань розподілених систем (Формула Релея. Основний варіаційний принцип. Варіаційний принцип Релея і Куранта).

11. Структура спектра власних частот (Дискретний, суцільний і змішаний спектри. Визначення власних частот. Точні методи. Метод малого параметра (метод збурень). Метод послідовних наближень. Метод теорії лінійних інтегральних рівнянь. Асимптотичні методи).

12. Визначення власних частот і власних форм розподілених систем (Метод Релея і родинні методи. Метод Рітца. Метод Стодоли. Метод Бубнова-Гальоркіна. Зв'язок між методами Бубнова-Гальоркіна і Рітца. Застосування методу Бубнова-Гальоркіна до інтегральних рівнянь. Метод Граммель).

13. Узагальнення методу Бубнова-Гальоркіна. Метод Власова-Канторовича. Метод внутрішньої колокації. Зв'язок методу внутрішньої колокації з методом Бубнова-Гальоркіна. Метод мінімуму середньоквадратичної помилки. Метод динамічних жорсткостей. Зв'язок методу динамічних жорсткостей з МСЕ. Метод динамічних податливостей).

14. Динамічна стійкість розподілених систем (Вільні коливання розподілених неконсервативних систем. Розподілені дисипативні системи. Метод нормальних координат. Метод нормальних координат. Метод функціоналів Ляпунова. Спрощений метод дослідження стійкості).

4. Структура навчальної дисципліни

Назва теми	Кількість годин			
	Усього	у тому числі		
		Лекції	Практичні Заняття	Самостійна Робота
1	2	3	4	5
1. Складні механічні системи. Рівняння складних механічних систем на прикладі руху твердого тіла з рідиною і твердого тіла з пружними відсіками з рідиною	8	2	2	4
2. Методи зведення гібридних рівнянь руху СМС (звичайних диференціальних рівнянь руху твердого тіла та диференціальних рівнянь в частинних похідних пружності і рідини) в лічильну систему звичайних диференціальних рівнянь	8	2	2	4
3. Математичний опис складних механічних систем (Принцип Гамільтона-Остроградського. Узагальнене хвильове рівняння. Операторна запис рівнянь руху. Спектральна теорія самоспряжених лінійних операторів в гільбертовому просторі)	8	2	2	4
4. Метод Релея-Рітца-Гальоркіна (метод передбачуваних форм коливань).	8	2	2	4
5. Загальні властивості власних частот і власних форм розподілених систем (Рівняння вільних коливань в операторній формі. Енергетичні добутки. Ортогональність власних форм. Збіжність по енергетичній нормі)	8	2	2	4
6. Модальний аналіз (Розкладання за власними формами коливань. Властивості частот і форм коливань)	8	2	2	4
7. Метод скінченних елементів. Зв'язок МСЕ з методом Рітца	8	2	2	4
8. Стійкість сталих рухів складних систем (Стійкість по відношенню до частини змінних. Теореми про	8	2	2	4

стійкість і нестійкості. Завдання мінімуму для твердого тіла з порожниною, що містить рідину. Правило "великої вісі")				
9. Загальні рівняння руху пружного тіла з рідиною (Динамічні величини пружного тіла з рідиною, сили і моменти. Рівняння руху деформованої системи)	8	2	2	4
10. Варіаційні принципи в теорії власних коливань розподілених систем (Формула Релея. Основний варіаційний принцип. Варіаційний принцип Релея і Куранта)	8	2	2	4
11. Структура спектра власних частот (Дискретний, суцільний і змішаний спектри. Визначення власних частот. Точні методи. Метод малого параметра (метод збурень). Метод послідовних наближень. Метод теорії лінійних інтегральних рівнянь. Асимптотичні методи).	10	2	2	6
12. Визначення власних частот і власних форм розподілених систем (Метод Релея і родинні методи. Метод Рітца. Метод Стодоли. Метод Бубнова-Гальоркіна. Зв'язок між методами Бубнова-Гальоркіна і Ритца. Застосування методу Бубнова-Гальоркіна до інтегральних рівнянь. Метод Граммель).	10	2	2	6
13. Узагальнення методу Бубнова-Гальоркіна. Метод Власова-Канторовича. Метод внутрішньої колокації. Зв'язок методу внутрішньої колокації з методом Бубнова-Гальоркіна. Метод мінімуму середньоквадратичної помилки. Метод динамічних жорсткостей. Зв'язок методу динамічних жорсткостей з МСЕ. Метод динамічних податливостей)	10	2	2	6
14. Динамічна стійкість розподілених систем (Вільні коливання розподілених неконсервативних систем. Розподілені дисипативні системи. Метод нормальних координат. Метод нормальних координат. Метод функціоналів Ляпунова. Спрощений метод дослідження стійкості)	10	2	2	6
Усього годин	120	28	28	64

5. Теми практичних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Складні механічні системи. Рівняння складних механічних систем на прикладі руху твердого тіла з рідиною і твердого тіла з пружними відсіками з рідиною	2
2	Методи зведення гібридних рівнянь руху складних механічних систем (звичайних диференціальних рівнянь руху твердого тіла та диференціальних рівнянь в частинних похідних пружності і рідини) в лічильну систему звичайних диференціальних рівнянь	2
3	Математичний опис складних механічних систем (Принцип Гамільтона-Остроградського. Узагальнене хвильове рівняння. Операторна запис рівнянь руху. Спектральна теорія самоспряжених лінійних операторів в гільбертовому просторі)	2
4	Метод Релея-Рітца-Гальоркіна (метод передбачуваних форм коливань).	2
5	Загальні властивості власних частот і власних форм розподілених систем (Рівняння вільних коливань в операторній формі. Енергетичні добутки. Ортогональність власних форм. Збіжність по енергетичній нормі)	2
6	Модальний аналіз (Розкладання за власними формами коливань. Властивості частот і форм коливань)	2
7	Метод скінченних елементів. Зв'язок МСЕ з методом Рітца	2
8	Стійкість сталих рухів складних систем (Стійкість по відношенню до частини змінних. Теореми про стійкість і нестійкості. Завдання мінімуму для твердого тіла з порожниною, що містить рідину. Правило "великої вісі")	2
9	Загальні рівняння руху пружного тіла з рідиною (Динамічні величини пружного тіла з рідиною, сили і моменти. Рівняння руху деформованої системи)	2
10	Варіаційні принципи в теорії власних коливань розподілених систем (Формула Релея. Основний варіаційний принцип. Варіаційний принцип Релея і Куранта)	2
11	Структура спектра власних частот (Дискретний, суцільний і змішаний спектри. Визначення власних частот. Точні методи. Метод малого параметра (метод збурень). Метод послідовних наближень).	2
12	Визначення власних частот і власних форм розподілених систем (Метод Релея і родинні методи. Метод Рітца. Метод Стодоли. Метод Бубнова-Гальоркіна. Зв'язок між методами Бубнова-Гальоркіна і Ритца).	2
13	Узагальнення методу Бубнова-Гальоркіна. Метод Власова-Канторовича. Метод внутрішньої колокації. Зв'язок методу внутрішньої колокації з методом Бубнова-Гальоркіна. Метод мінімуму середньоквадратичної помилки. Метод динамічних жорсткостей)	2

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
14	Динамічна стійкість розподілених систем (Вільні коливання розподілених неконсервативних систем. Розподілені дисипативні системи. Метод нормальних координат. Метод функціоналів Ляпунова)	2
	Разом	28

6. Теми для самостійної роботи

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Рівняння складних механічних систем на прикладі руху твердого тіла з рідиною і твердого тіла з пружними відсіками з рідиною	4
2	Методи зведення гібридних рівнянь руху складних механічних систем в лічильну систему звичайних диференціальних рівнянь	4
3	Математичний опис складних механічних систем (Принцип Гамільтона-Остроградського. Узагальнене хвильове рівняння. Операторна запис рівнянь руху. Спектральна теорія самоспряжених лінійних операторів в гільбертовому просторі)	4
4	Метод Релея-Рітца-Гальоркіна (метод передбачуваних форм коливань).	4
5	Загальні властивості власних частот і власних форм розподілених систем (Рівняння вільних коливань в операторній формі. Енергетичні добутки. Ортогональність власних форм. Збіжність по енергетичній нормі)	4
6	Модальний аналіз (Розкладання за власними формами коливань. Властивості частот і форм коливань)	4
7	Метод скінченних елементів. Зв'язок МСЕ з методом Рітца	4
8	Стійкість сталих рухів складних систем (Стійкість по відношенню до частини змінних. Теореми про стійкість і нестійкості. Завдання мінімуму для твердого тіла з порожниною, що містить рідину. Правило "великої вісі")	4
9	Загальні рівняння руху пружного тіла з рідиною (Динамічні величини пружного тіла з рідиною, сили і моменти. Рівняння руху деформованої системи)	4
10	Варіаційні принципи в теорії власних коливань розподілених систем (Формула Релея. Основний варіаційний принцип. Варіаційний принцип Релея і Куранта)	4
11	Структура спектра власних частот (Дискретний, суцільний і змішаний спектри. Визначення власних частот. Точні методи. Метод малого параметра (метод збурень). Метод послідовних наближень. Метод теорії лінійних інтегральних рівнянь. Асимптотичні методи).	6
12	Визначення власних частот і власних форм розподілених систем (Метод Релея і родинні методи. Метод Рітца. Метод Стодоли. Метод Бубнова-Гальоркіна. Зв'язок між методами Бубнова-Гальоркіна і Рітца. Застосування методу Бубнова-Гальоркіна до інтегральних рівнянь. Метод Граммель).	6

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
13	Узагальнення методу Бубнова-Гальоркіна. Метод Власова-Канторовича. Метод внутрішньої колокації. Зв'язок методу внутрішньої колокації з методом Бубнова-Гальоркіна. Метод мінімуму середньоквадратичної помилки. Метод динамічних жорсткостей. Зв'язок методу динамічних жорсткостей з МСЕ. Метод динамічних податливостей)	6
14	Динамічна стійкість розподілених систем (Вільні коливання розподілених неконсервативних систем. Розподілені дисипативні системи. Метод нормальних координат. Метод нормальних координат. Метод функціоналів Ляпунова. Спрощений метод дослідження стійкості)	6
	Разом	64

7. Методи навчання

При викладанні навчальної дисципліни «Вибіркові розділи механіки суцільного середовища» використовуються такі методи навчання: метод проблемного навчання, евристичне навчання, модульно-рейтингова система навчання.

8. Методи контролю

Використовуються наступні методи контролю:

1. Поточний контроль знань:

- усне опитування;
- виконання практичних робіт;
- тестування;
- виконання дослідницьких завдань.

2. Підсумковий контроль знань (іспит):

- підсумковий тест або екзаменаційні білети.

9. Критерії оцінювання результатів навчання

Розподіл балів, які отримує аспірант

Аудиторна робота													Самостійна Робота	Підсумковий контроль (іспит)	Загальна кількість отриманих балів
Теми															
T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7 T8	T9	T10	T11	T12	T13	T14			
2	2	2	2	2	2	4	4	4	4	4	4	4	20	40	100

Шкала оцінювання

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка за національною шкалою
	для іспиту
90-100	«відмінно» - здобувач повно і всебічно розкриває питання теми, вільно оперує поняттями і термінологією, демонструє глибокі знання джерел, має власну точку зору стосовно відповідної теми і може аргументовано її доводити
75-89	«добре» - загалом рівень знань здобувачів відповідає викладеному вище, але мають місце деякі упущення при виконанні завдань, обґрунтування неточні, не підтверджуються достатньо обґрунтованими доказами
60-74	«задовільно» - здобувач розкрив питання, в загальних рисах, розуміє їх суть, намагається робити висновки, але при цьому припускається грубих помилок, матеріал викладає нелогічно і не самостійно
35-59	«незадовільно» - з можливістю повторного складання, здобувач не в змозі дати відповідь на поставлене запитання або відповідь неправильна, не розуміє суті питання, не може зробити висновки
0-34	«незадовільно» - з обов'язковим повторним вивченням дисципліни

10. Орієнтовний перелік питань до підсумкового контролю (іспиту)

1. Складні механічні системи. Рівняння складних механічних систем на прикладі руху твердого тіла з рідиною і твердого тіла з пружними відсіками з рідиною.
2. Методи зведення гібридних рівнянь руху СМС (звичайних диференціальних рівнянь руху твердого тіла та диференціальних рівнянь в частинних похідних пружності і рідини) в лічильну систему звичайних диференціальних рівнянь.
3. Математичний опис складних механічних систем (Принцип Гамільтона-Остроградського. Узагальнене хвильове рівняння. Операторна запис рівнянь руху. Спектральна теорія самоспряжених лінійних операторів в гільбертовому просторі).
4. Метод Релея-Рітца-Гальоркіна (метод передбачуваних форм коливань).
5. Загальні властивості власних частот і власних форм розподілених систем (Рівняння вільних коливань в операторній формі. Енергетичні добутки. Ортогональність власних форм. Збіжність по енергетичній нормі).
6. Модальний аналіз (Розкладання за власними формами коливань. Властивості частот і форм коливань).
7. Метод скінченних елементів. Зв'язок МСЕ з методом Рітца.

8. Стійкість сталих рухів складних систем (Стійкість по відношенню до частини змінних. Теореми про стійкість і нестійкості. Завдання мінімуму для твердого тіла з порожниною, що містить рідину. Правило "великої вісі").

9. Загальні рівняння руху пружного тіла з рідиною (Динамічні величини пружного тіла з рідиною, сили і моменти. Рівняння руху деформованої системи).

10. Варіаційні принципи в теорії власних коливань розподілених систем (Формула Релея. Основний варіаційний принцип. Варіаційний принцип Релея і Куранта).

11. Структура спектра власних частот (Дискретний, суцільний і змішаний спектри. Визначення власних частот. Точні методи. Метод малого параметра (метод збурень). Метод послідовних наближень. Метод теорії лінійних інтегральних рівнянь. Асимптотичні методи).

12. Визначення власних частот і власних форм розподілених систем (Метод Релея і родинні методи. Метод Рітца. Метод Стодоли. Метод Бубнова-Гальоркіна. Зв'язок між методами Бубнова-Гальоркіна і Ритца. Застосування методу Бубнова-Гальоркіна до інтегральних рівнянь. Метод Граммель).

13. Узагальнення методу Бубнова-Гальоркіна. Метод Власова-Канторовича. Метод внутрішньої колокації. Зв'язок методу внутрішньої колокації з методом Бубнова-Гальоркіна. Метод мінімуму середньоквадратичної помилки. Метод динамічних жорсткостей. Зв'язок методу динамічних жорсткостей з МСЕ. Метод динамічних податливостей).

14. Динамічна стійкість розподілених систем (Вільні коливання розподілених неконсервативних систем. Розподілені дисипативні системи. Метод нормальних координат. Метод функціоналів Ляпунова. Спрощений метод дослідження стійкості).

11. Рекомендована література

Основна література дисципліни

1. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. – М.: Наука, 1965. – 440с.
2. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. – М.: Наука. – 1969. – 380 с.
3. Микишев Г.Н., Рабинович Б.И. Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость. – М.: Машиностроение, 1971. - 563 с.
4. Черноусько Ф.Л. Динамика твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. – М.: ВЦ АН СССР, 1968.–230с.
5. Докучаев Л.В. Нелинейная динамика летательного аппарата с деформируемыми элементами. – Машиностроение, 1987. –232с.

6. Докучаев Л.В. Нелинейная динамика упругого летательного аппарата // Итоги науки и техники: Общая механика. – М.: ВИНТИ, 1982. – Т. 5. – С. 135-197.
7. Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике. – М.: Наука, 1980. – 416с.
8. Луковский И.А. Математические модели нелинейной динамики твердых тел с жидкостью. – К.: Наукова думка. – 2010 – 408 с.
9. Луковский И.А., Троценко В.А., Усюкин В.И. Взаимодействие тонкостенных упругих элементов с жидкостью в подвижных полостях. – К.: Наук. думка, 1989. – 240 с.
10. Троценко В.А. Колебания жидкости в подвижных емкостях с перегородками – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2006. – 320 с.
11. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. – М.: Машиностроение, 1978. – Т.1. – 352 с., 1978. – Т.2. – 351 с., 1980. – Т.3. – 544 с.
12. Гребенников Е.А. Метод усреднения в прикладных задачах. – М.: Наука. – 1986. – 256 с.
13. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука. – 1957. – 476 с.
14. Джакалья Г.Е.О. Методы теории возмущений для нелинейных систем. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
15. Найфе А. Введение в методы возмущений. – М.: Мир. – 1984. – 536 с.
16. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – М.: Наука, 1988. – 336 с.
17. Чуличков А.И. Математические модели нелинейной динамики. – М.: Физматлит. – 2003.
18. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966. – 532с.
19. Кононов Ю.Н. Основные методы исследования сложных механических систем: Методическое пособие по спецкурсу “Динамика тел с полостями, содержащими жидкость”. – Донецк: ДонНУ, 2007. – 40 с.

Допоміжна література дисципліни

1. Горшков А.Г., Морозов В.И., Пономарев А.Г., Шклярчук Ф.Н. Аэрогидроупругость конструкций. – М.: Физматлит, 2000. – 591 с.
2. Ершов Н.Ф., Шахверди Г.Г. Метод конечных элементов в задачах гидродинамики и гидроупругости. – Л.: Судостроение, 1984. – 237 с.
3. Григолюк Э.И. Метод Бубнова. Истоки. Формулировка. Развитие. – М.: НИИ Механики МГУ, 1996. – 58 с.
4. Румянцев В.В. Некоторые задачи динамики сложных систем. // Пробл. прикл. математики и механики. – М., 1971. – С. 179-188.
5. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. – М.: Наука. – 1979. – 384 с.
6. Седов Л.И. Математические методы построения новых моделей сплошных сред. // Успехи математических наук. – 1965. – Том XX, вып. 5 (125) – С. 121-180.

7. Шмаков В.М. Построение корректирующих функций в методе Бубнова-Галеркина // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1981. – № 2. – С. 80-92.
8. Балакирев Ю.Г. Особенности построения корректирующих функций при анализе свободных колебаний механических систем методом Бубнова // Прикл. математика и механика. – 2003. – Т.67, вып.6. – С. 1040-1050.
9. Faltinsen O.M., Timokha A.N. *Sloshing*. – Cambridge University Press, 2009. – 686 p.
10. Lukowsky Ivan A. *Nonlinear Dynamics. Mathematical Models for Bodies with a Liquid* – De Gruyter Studies in Mathematical Physics. Volume 27, 2015–393 p.
11. Yu.M. Kononov, V.P. Shevchenko, Yu.O. Dzhukha. Axially symmetric vibrations of elastic annular bases and a perfect two-layer liquid in a rigid annular cylindrical vessel. *Journal of Mathematical Sciences* , 2019, **240** (1), p. 98–112.
12. Yu.M. Kononov, Yu.O. Dzhukha. Vibrations of Two-Layer Ideal Liquid in a Rigid Cylindrical Vessel with Elastic Bases. *Journal of Mathematical Sciences* 2020, **246** , p. 365–383.